

LKAbi 2014: Kurze Zusammenfassungen

B. Waldmüller

19. Januar 2013



Abbildung 1: Bernhard Riemann, 1826–1866

Inhaltsverzeichnis

1	Änderungen und Änderungsraten	2
2	Exponentialfunktionen	4
3	Trigonometrische Funktionen	5
4	Das Integral	6
4.1	Einstiegsbeispiel	6
4.2	Riemannsche Summen	8
4.3	Verfeinerung der Zerlegung Z	8
4.4	Das Integral	8
4.5	Was du über das Integral unbedingt wissen musst	11
4.6	Stammfunktionen	13
4.7	Die Integralfunktion, Stetigkeit und der Hauptsatz	14
5	Anwendungen der Integralrechnung	17
5.1	Volumenberechnung	17
5.1.1	Rotationskörper	18
5.1.2	Doppelintegrale	19
6	Taylorpolynome und Taylorreihen	20

1 Änderungen und Änderungsraten

In der Analysis betrachten wir eine Größe, die gewöhnlich y heißt, die von einer anderen Größe x abhängt. In der Regel wird die Abhängigkeit durch eine Gleichung der Art

$$y = f(x)$$

beschrieben.

Eine Änderung Δx von x zieht gewöhnlich eine Änderung Δy von y nach sich:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y$$

Das Verhältnis der Änderungen ist eine mittlere Änderungsrate oder, geometrisch gesprochen, eine Sekantensteigung. Für $\Delta x \rightarrow 0$ strebt diese gegen die lokale Änderungsrate $f'(x)$, oder, geometrisch gesprochen, die Tangentensteigung in (x, y) :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f'(x)$$

Daraus ergibt sich, dass für „kleine“ Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$$

gilt, und daraus erhalten wir

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x \quad \text{und} \quad f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x .$$

Der Term $f'(x)\Delta x$ heißt der **lineare Anteil** von Δy .

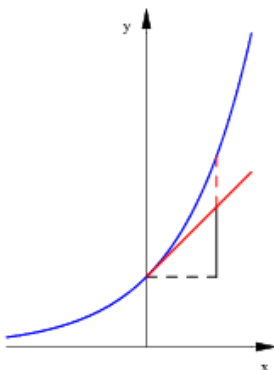


Abbildung 2: Änderungen Δx , Δy und linearer Anteil $f'(x)\Delta x$

Der **Mittelwertsatz** sagt für diese Situation, dass

$$\Delta y = f'(x^*)\Delta x$$

ist für (mindestens) ein x^* zwischen x und $x + \Delta x$. Das heißt, zu der Sekante durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ gibt es mindestens eine parallele Tangente, die den Graphen von f zwischen diesen Punkten berührt. Wir reden dabei natürlich nur von glatten Kurven.

Als kleines **Anwendungsbeispiel** gebe ich dir eine Herleitung der Kettenregel. Wir haben eine Funktion v mit $z = v(x)$. Den Wert z setzen wir in eine zweite

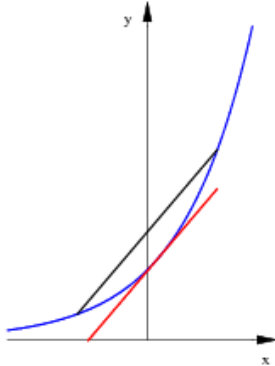


Abbildung 3: Sekante und parallele Tangente, die es nach dem Mittelwertsatz geben muss

Funktion u ein: $y = u(z) = u(v(x))$. Ändern wir x um Δx , bewirkt dies eine Änderung

$$\Delta z = v'(x^*)\Delta x \quad \text{für ein } x^* \text{ zwischen } x \text{ und } x + \Delta x.$$

Diese Änderung von z bewirkt eine Änderung

$$\Delta y = u'(z^*)\Delta z = u'(z^*)v'(x^*)\Delta x$$

für ein z^* zwischen z und $z + \Delta z$. Es folgt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u'(z^*)v'(x^*)\Delta x}{\Delta x} = u'(z^*)v'(x^*) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} u'(z)v'(x) .$$

Dies ist die **Kettenregel**:

$$(u(v(x)))' = u'(v(x))v'(x) ,$$

eine äußerst wichtige Ableitungsregel, die du schon mehrfach angewandt hast.

Zurück zu unseren Änderungen. Wenn man statt mit der Änderung Δy selbst mit dem linearen Anteil $f'(x)\Delta x$ rechnet, macht man einen Fehler, nämlich den **Abschneidefehler**

$$r(\Delta x) := \Delta y - f'(x)\Delta x .$$

Wir dividieren die Gleichung durch Δx und lassen dann Δx gegen 0 laufen:

$$\frac{r(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f'(x) - f'(x) = 0$$

Der Abschneidefehler $r(\Delta x)$ hat also folgende bemerkenswerte Eigenschaft: **Sogar der Quotient $\frac{r(\Delta x)}{\Delta x}$ strebt noch gegen 0, wenn Δx gegen 0 strebt.** Dass $r(\Delta x)$ selbst mit Δx gegen 0 strebt, ist ohnehin klar.

Zur Verdeutlichung einige Aufgaben:

1. Die Terme x , x^2 und \sqrt{x} streben alle gegen 0, wenn x gegen 0 strebt. Wie verhalten sich die Quotienten dieser Terme durch x für x gegen 0?
2. Berechne den linearen Anteil von Δy und $r(\Delta x)$ für $f(x) = x^2$ und für $f(x) = x^3$.

2 Exponentialfunktionen

Aus einem Kapital K , das mit 4% verzinst wird, wird nach einem Jahr $K \cdot 1.04$, nach zwei Jahren $(K \cdot 1.04) \cdot 1.04 = K \cdot 1.04^2$, nach drei Jahren $(K \cdot 1.04)^2 \cdot 1.04 = K \cdot 1.04^3$, und so fort. Denkt man dies weiter, gelangt man zu Exponentialfunktionen, also zu Funktionen der Art $f(x) = b \cdot a^x$. Dabei ist a eine positive reelle Zahl, aber $a \neq 1$.

Wir wollen nach der Ableitung von $f(x) = a^x$ fragen. Der übliche Ansatz

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} a^x \cdot c$$

führt zu folgendem Ergebnis: Die Ableitung von $f(x) = a^x$ ist a^x multipliziert mit einem Faktor c , und dieser ist nichts Anderes als die Tangentensteigung $f'(0)$ im Punkt $(0|1)$.

Indem wir Näherungswerte für c bestimmen, sehen wir, dass das c von 2^x kleiner als 1 und dass das c von 3^x größer als 1 ist. Je größer das a ist, desto steiler ist die Tangente in $(0|1)$. Also sollte es eine Zahl e zwischen 2 und 3 so geben, dass das c von e^x genau 1 ist. Für diese Zahl¹ e ist folglich

$$(e^x)' = e^x \quad . \quad (1)$$

Die Umkehrfunktion dazu ist der natürliche Logarithmus \ln . Da der Graph des \ln der gespiegelte Graph von $y = e^x$ ist, sollte er überall eine Tangente haben. Die Ableitung des \ln gewinnen wir dann über implizite Differentiation mit Hilfe der Kettenregel: Aus

$$e^{\ln(x)} = x$$

folgt

$$(e^{\ln(x)})' = 1 \quad ,$$

also

$$e^{\ln(x)} \cdot (\ln(x))' = 1 \quad .$$

Somit ist

$$(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x} \quad ,$$

ein durchaus verblüffendes Ergebnis.

Nun können wir auch das c von oben exakt angeben:

$$(a^x)' = \left((e^{\ln(a)})^x \right)' = (e^{x \ln(a)})' = e^{x \ln(a)} \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$$

Es gilt also

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a) \quad .$$

¹Sie heißt Eulersche Zahl.

3 Trigonometrische Funktionen

Man definiert die trigonometrischen Funktionen am besten am Einheitskreis: Stelle dir einen Punkt vor, der gegen den Uhrzeigersinn auf dem Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius 1 läuft. Startpunkt ist der Punkt $(1, 0)$. Wenn der Punkt den Weg t zurückgelegt hat, befinde er sich an der Stelle $P(t) = (x(t), y(t))$.

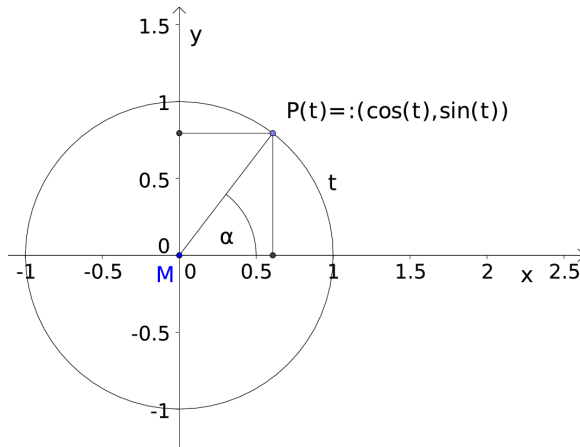


Abbildung 4: Definition von sin und cos am Einheitskreis

Nun **definiert** man

$$\sin(t) := y(t), \quad \cos(t) := x(t), \quad \tan(t) := \frac{\sin(t)}{\cos(t)}. \quad (2)$$

Das **Bogenmaß** t kann man leicht in den zugehörigen Winkel α umrechnen. Das geht nach dem Dreisatz: Der Anteil von t am Umfang des Kreises ist gleich dem Anteil von α an 360° :

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{t}{2\pi}, \quad (3)$$

und das gilt auch für $\alpha > 360^\circ$.

Hoffentlich hast du früher die trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck gelernt, da war

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{GK}{H}.$$

Das geht natürlich nur für $0 < \alpha < 90^\circ$. Für diese Winkel stimmt der neue Sinus mit dem alten Sinus überein: Die Gegenkathete ist die y -Koordinate, die Hypotenuse hat die Länge 1. Für den Kosinus gilt Entsprechendes.

Eine wichtige Beziehung bekommst du gleich frei Haus geliefert, nämlich den **trigonometrischen Pythagoras**

$$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

So, wir wollen natürlich die trigonometrischen Funktionen ableiten. Dazu zeichnen wir uns eine neue Skizze (siehe Abbildung 5).

Wir beginnen mit dem sin, gehen den üblichen Weg und bilden $\frac{\Delta y}{\Delta t}$. Dabei ist $\Delta y = \sin(t + \Delta t) - \sin(t)$ die Länge der Strecke mit den Endpunkten $P(t + \Delta t)$

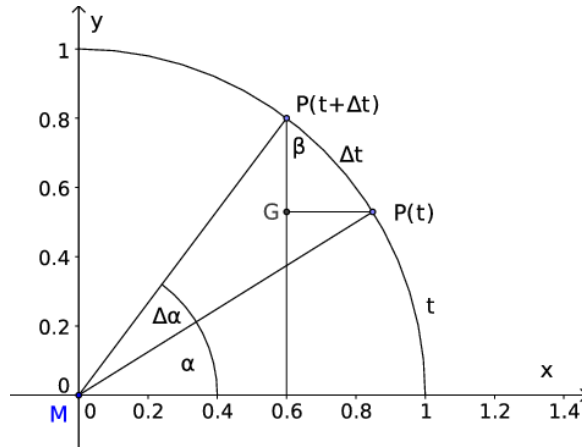


Abbildung 5: Zur Ableitung von sin und cos

und G in Abbildung 5. Für sehr kleine Δt können wir das Bogenstück der Länge Δt getrost als gerade ansehen, und dann gewinnen wir in dem Dreieck mit den Eckpunkten $P(t)$, $P(t + \Delta t)$ und G die Gleichung

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \cos(\beta) \quad .$$

Die Größe des Winkels β bestimmen wir zu

$$\beta = (90^\circ - \frac{1}{2}\Delta\alpha) - (90^\circ - (\alpha + \Delta\alpha)) = \alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha \quad ,$$

folglich gilt

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \cos\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \cos(\alpha) \quad .$$

Es folgt

$$(\sin(t))' = \cos(t) \quad . \tag{5}$$

Auf gleiche Weise erhält man

$$(\cos(t))' = -\sin(t) \quad , \tag{6}$$

dabei muss man nur beachten, dass hier $\Delta x = \cos(t + \Delta t) - \cos(t)$ negativ ist. Natürlich muss man sich noch überlegen, dass die Ableitungen auch so herauskommen, wenn nicht $0 < t < t + \Delta t < \frac{1}{2}\pi$ ist, aber das schenken wir uns, es stimmt garantiert.

4 Das Integral

4.1 Einstiegsbeispiel

Es fließe Wasser aus einem Behälter, und zur Zeit x mögen gerade

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Liter pro Minute aus dem Behälter fließen; dabei werde x in Minuten gemessen.

Wir fragen, wieviel Liter im Zeitraum von $x = 1$ bis $x = 3$ aus dem Behälter laufen. Betrachten wir zunächst nur einen kleinen Zeitabschnitt von x bis $x + \Delta x$

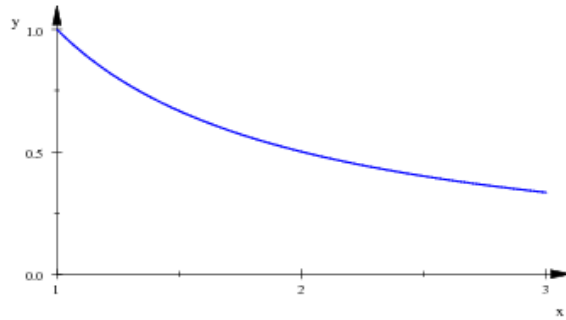


Abbildung 6: Graph von f

für ein positives Δx . Da der Graph von f fällt, liegt die Ausflussgeschwindigkeit des Wassers in diesem Zeitraum zwischen $f(x)$ (größtmöglicher Wert) und $f(x + \Delta x)$ (kleinstmöglicher Wert). Folglich gilt für die Menge Δm des Wassers, das in der Zeit von x bis $x + \Delta x$ aus dem Behälter fließt,

$$f(x)\Delta x \geq \Delta m \geq f(x + \Delta x)\Delta x .$$

Die obere und die untere Schranke für die geflossene Wassermenge Δm sind in Abbildung 7 (links) als Inhalte von Rechtecken zu sehen. Ist Δx sehr klein, wird sich der Funktionswert von f in der Zeit von x bis $x + \Delta x$ nur wenig ändern, und dann wird

$$\Delta m \approx f\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right) \Delta x$$

sein; das ist der Inhalt des Rechtecks in Abbildung 7 (rechts).

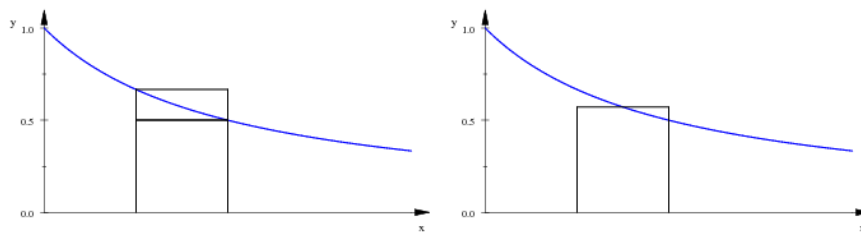


Abbildung 7: obere und untere Schranke (links) und Näherungswert für Δm

Arthurs Schranken und einen Näherungswert für die gesamte in der Zeit von 1 bis 3 ausgelaufene Menge ΔM bekommen wir nun so: Wir teilen den ganzen Abschnitt in n Teilstücke gleicher Länge ein, bilden die Schranken und den Näherungswert für jedes Teilstück und addieren die Werte jeweils auf. Es ergibt sich

$$\sum_{k=1}^n f(1 + (k-1)\Delta x)\Delta x \geq \Delta M \geq \sum_{k=1}^n f(1 + k\Delta x)\Delta x$$

und

$$\Delta M \approx \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{1}{2}\Delta x + (k-1)\Delta x\right) \Delta x .$$

Lasse dich bloß nicht von den Summenzeichen einschüchtern, den Umgang damit üben wir noch. Schau genau hin, der allgemeine Summand ist immer der Inhalt des k -ten Kästchens der Summe.

4.2 Riemannsche Summen

Die drei Summen oben sind Spezialfälle von etwas, das man Riemannsche Summe nennt. Wir brauchen den allgemeinen Begriff:

1 Definition

Die Funktion f sei auf dem Intervall $[a, b]$ definiert. Durch einen Satz

$$a = z_0 < z_1 < z_2 < z_3 < \dots < z_n = b$$

von Zwischenwerten z_k ist eine **Zerlegung** Z des Intervalls $[a, b]$ gegeben. Man wählt in jedem Teilintervall $[z_{k-1}, z_k]$ eine Zahl x_k . Dann heißt die Summe

$$\sum_{k=1}^n f(x_k)(\Delta x)_k = \sum_{k=1}^n f(x_k)(z_k - z_{k-1})$$

eine **Riemannsche Summe** zur Zerlegung Z . Dabei ist $(\Delta x)_k := z_k - z_{k-1}$ die Länge des k -ten Teilintervalls.

Wählt man die x_k so, dass $f(x_k)$ das kleinste der $f(x)$ für $z_{k-1} \leq x \leq z_k$ ist, erhält man die untere Arthursche Schranke $UAS(Z)$; wählt man die x_k so, dass $f(x_k)$ das größte der $f(x)$ für $z_{k-1} \leq x \leq z_k$ ist, erhält man die obere Arthursche Schranke $OAS(Z)$. Offensichtlich gilt

$$UAS(Z) \leq \text{beliebige Riemannsche Summe zur Zerlegung } Z \leq OAS(Z) \quad . \quad (7)$$

4.3 Verfeinerung der Zerlegung Z

Wenn wir einen weiteren Teilpunkt z in die Zerlegung Z einfügen, erhalten wir eine neue Zerlegung Z'

$$a = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_{k-1} < z < z_k < \dots < z_n = b$$

des Intervalls $[a, b]$; der neue Teilpunkt z liegt hier im k -ten Teilintervall. Um den Inhalt der schraffierten Fläche in Abbildung 8 links wird die untere Arthursche Schranke größer, um den Inhalt der schraffierten Fläche in Abbildung 8 rechts wird die obere Arthursche Schranke kleiner²; insgesamt rücken die obere und die untere Arthursche Schranke näher an einander. Jedenfalls gilt

$$UAS(Z) \leq UAS(Z') \leq OAS(Z') \leq OAS(Z) \quad . \quad (8)$$

4.4 Das Integral

Wenn wir mit einer Zerlegung Z_0 von $[a, b]$ beginnen und immer neue Teilpunkte hinzufügen, erhalten wir eine Folge $Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ von Zerlegungen des Intervalls. Jede Zerlegung liefert uns Arthursche Schranken

$$UAS(Z_j) \leq OAS(Z_j) \quad ,$$

²Du kannst dir ein Beispiel überlegen, bei der meinetwegen die untere Arthursche Schranke gleich bleibt; das geht. Kleiner werden kann sie aber nicht, wenn man die Zerlegung verfeinert.

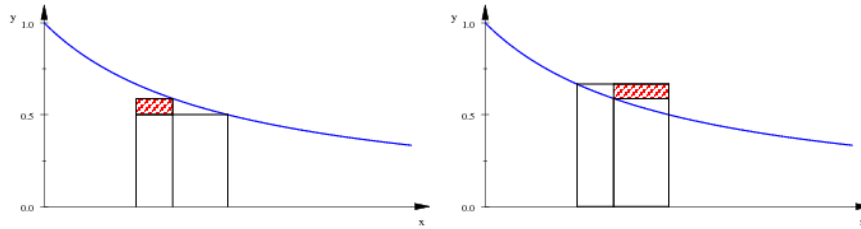


Abbildung 8: Bei Verfeinerung von Z zu Z' wird die untere Arthursche Schranke größer und die obere kleiner.

und es gilt stets

$$UAS(Z_j) \leq UAS(Z_{j+1}) \leq OAS(Z_{j+1}) \leq OAS(Z_j) .$$

Wenn die Differenzen $OAS(Z_j) - UAS(Z_j)$ dabei gegen 0 laufen für $n \rightarrow \infty$, bilden die Intervalle $[UAS(Z_j), OAS(Z_j)]$ eine Intervallschachtelung, die genau eine Zahl festlegt. Diese Zahl wäre dann das exakte Ergebnis, also die Maßzahl der zugelaufenen Wassermenge oder der exakte Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen und der x -Achse zwischen $x = a$ und $x = b$.

Schauen wir uns den Unterschied $OAS(Z) - UAS(Z)$ der Arthurschen Schranken an. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, dass f monoton fallend ist: Für $a \leq u < v \leq b$ ist also stets $f(u) \geq f(v)$. Der Beitrag des k -ten Kästchens zur Differenz ist dann³

$$f(x_{k-1})(z_k - z_{k-1}) - f(x_k)(z_k - z_{k-1}) = (f(x_{k-1}) - f(x_k))(z_k - z_{k-1}) .$$

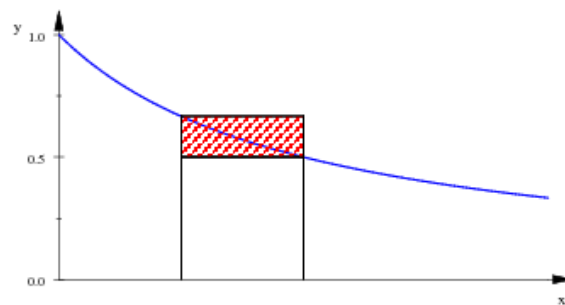


Abbildung 9: Beitrag des k -ten Kästchens zur Differenz $OAS(Z) - UAS(Z)$

2 Lemma

Es sei f monoton fallend auf $[a, b]$ und Z eine Zerlegung von $[a, b]$. Die größte der Zahlen $z_k - z_{k-1}$, also die Länge des größten Teilstücks der Zerlegung, bezeichnen wir mit Δx . Dann ist

$$OAS(Z) - UAS(Z) \leq (f(a) - f(b)) \Delta x .$$

³siehe Abbildung 9

Beweis. Nach den gerade angestellten Überlegungen ist der Beitrag des k -ten Kästchens zur Differenz

$$(f(z_{k-1}) - f(z_k))(z_k - z_{k-1}) \leq (f(z_{k-1}) - f(z_k)) \Delta x .$$

Die Summe aller Beiträge ist folglich, wenn man Δx ausklammert, höchstens

$$\begin{aligned} ((f(a) - f(z_1)) + (f(z_1) - f(z_2)) + (f(z_2) - f(z_3)) + \dots + (f(z_{n-1}) - f(b))) \Delta x \\ = (f(a) - f(b)) \Delta x . \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. \square

Jetzt können wir den Sack zubinden:

3 Satz

Es sei f monoton fallend auf $[a, b]$ und Z eine Zerlegung von $[a, b]$. Wir verfeinern Z durch Hinzunahme immer neuer Zwischenpunkte zu einer Zerlegungsfolge

$$Z = Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, \dots$$

so, dass die Länge $(\Delta x)_n$ des längsten Teilstücks von Z_n gegen 0 geht für $n \rightarrow \infty$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. $OAS(Z_n) - UAS(Z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
2. Die Folgen $UAS(Z_n)$ und $OAS(Z_n)$ streben für n gegen Unendlich gegen den gleichen Grenzwert.
3. Jede Folge Riemannscher Summen zu Z_n strebt für n gegen Unendlich ebenfalls gegen diesen Grenzwert.

Dieser Grenzwert heißt das **Integral**⁴ von a bis b über f , in Zeichen

$$\int_a^b f(x) dx .$$

Natürlich können wir den Satz auch für Funktionen formulieren, die in einem Intervall $[a, b]$ monoton steigend sind; seine Aussage gilt also auch für monoton steigende Funktionen. Die meisten unserer Funktionen sind aber weder steigend noch fallend. Wenn wir das Intervall $[a, b]$, in dem wir die Funktion integrieren wollen, in Teilintervalle zerlegen können, in denen die Funktion monoton ist, ergibt sich aus unserem Satz, dass auch für diese Funktionen das Integral $\int_a^b f(x) dx$ ein sinnvoller Ausdruck ist.

So, das war nun starker Tobak, und ich hoffe, dass du nicht entsetzt bist. Wenn ich die Sachen aufschreibe, sollen die halbwegs in Ordnung sein, und dann kann es auch mal etwas komplizierter werden. Einige Vereinfachungen habe ich schon noch vorgenommen: So braucht es maximale $f(x)$ oder minimale $f(x)$, wie ich sie für die Arthurschen Schranken benutzt habe, im allgemeinen Fall nicht zu geben, und einen schlüssigen Nachweis, dass bei einer anderen Zerlegungsfolge von $[a, b]$ beim Integral das Gleiche herauskommt, habe ich auch nicht geführt. Du hast vermutlich keine Zweifel, dass ein krummlinig berandetes Flächenstück auch einen Inhalt hat, und wenn das zutrifft, muss beim Integral immer dasselbe herauskommen. In der Mathematik muss aber erst einmal sauber definiert werden, was unter dem Inhalt eines krummlinig berandeten Flächenstücks zu verstehen ist. Wir könnten den jetzt mit Hilfe des Integrals definieren, aber so weit werde ich es nicht treiben.

⁴Genauer: das Riemannintegral

4.5 Was du über das Integral unbedingt wissen musst

Du musst wissen,

1. was das Integral bedeutet,
2. wie du Integrale praktisch ausrechnest,
3. was Riemannsche Summen sind und was sie mit dem Integral zu tun haben.

Am besten schaust du dir noch einmal das Eingangsbeispiel an. Hier bedeutet das Integral

$$\int_1^3 \frac{1}{x} dx$$

zum einen die in der Zeit von 1 bis 3 zugeflossene Wassermenge ΔM in Litern, andererseits den (orientierten!) Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse zwischen $x = 1$ und $x = 3$.

Zur Berechnung des Integrals erinnerst du dich noch einmal daran, was $f(x) = \frac{1}{x}$ bedeuten sollte: Soviel Liter pro Minute fließen genau zum Zeitpunkt x in ein Gefäß. Achtung: Das ist eine lokale Änderungsrate. Nun wird es eine Funktion F geben, die angibt, wieviele Liter gerade zum Zeitpunkt x in dem Gefäß sind. Ganz gleich, wieviel Wasser zum Zeitpunkt 1 schon in dem Gefäß waren, die in der Zeit von 1 bis 3 zugeflossene Menge ist immer

$$\Delta M = F(3) - F(1) \quad .$$

Offensichtlich ist f die lokale Änderungsrate von F . Damit ist die Sache klar: Wir suchen eine Funktion F , deren Ableitung gerade f ist, und bilden mit der die Differenz $F(3) - F(1)$; das muss das ΔM sein! Bei unserem f können wir den natürlichen Logarithmus nehmen, der liefert uns das Ergebnis. Bewährt hat sich folgende Form, die Sache hinzuschreiben, und an die wirst du dich halten:

$$\int_1^3 \frac{1}{x} dx = \ln(x) \Big|_1^3 = \ln(3) - \ln(1) = \ln(3)$$

Das ist das Ergebnis!

Du magst dich fragen, warum man noch Riemannsche Summen braucht, wenn man Integrale so schön ausrechnen kann. Nun, die Riemannschen Summen zeigen überhaupt erst, dass für die Änderung und den (orientierten) Flächeninhalt dieselbe Zahl herauskommt. Ferner gibt es Funktionen f , für die man kein F mit $F' = f$ angeben kann. Vielleicht hat man von f auch nur eine Wertetabelle oder eine Messkurve. In all diesen Fällen berechnet man mit Hilfe Riemannscher Summen Näherungswerte für das gesuchte Integral. Ein paar Bilder sollen dir noch einmal verdeutlichen, wie sich die Werte Riemannscher Summen dem Wert des Integrals annähern (siehe Abbildung 10).

Aufgabe. Ingo kann $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$ nicht berechnen, weil er den natürlichen Logarithmus nicht kennt. Deshalb möchte er mit Hilfe einer Riemannschen Summe einen Näherungswert dafür berechnen, der aber höchstens $1/100$ vom wahren Wert abweichen soll. Wieviele Teilstücke muss er nehmen?

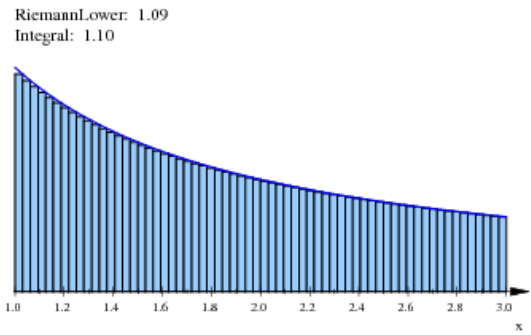
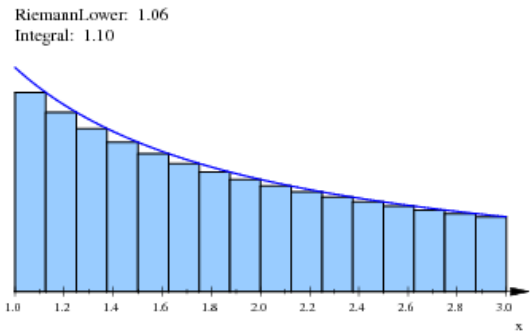
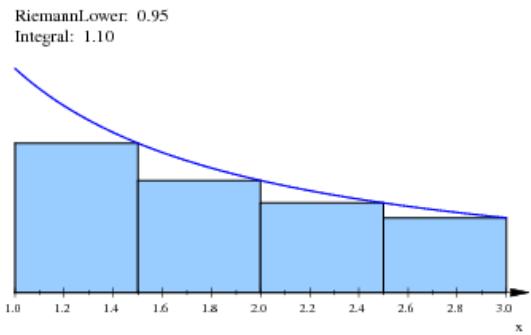
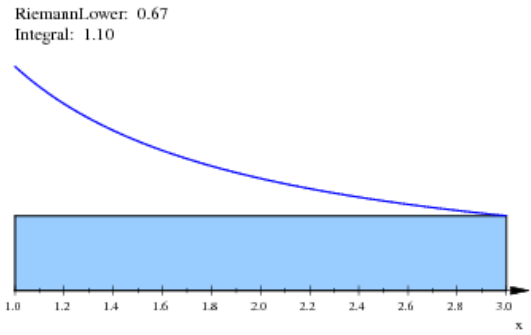


Abbildung 10: Untere Arthursche Schranken für $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$ zu äquidistanten Zerlegungen des Intervalls $[1, 3]$ in 1, 4, 16 und 64 Teilstücke

4.6 Stammfunktionen

4 Definition

Eine Funktion F , für die $F'(x) = f(x)$ ist für alle $x \in [a, b]$, heißt eine **Stammfunktion** von f auf $[a, b]$.

Zum Beispiel ist $2x^3$ eine Stammfunktion von $6x^2$ und $-e^{-x}$ eine Stammfunktion von e^{-x} .

Stammfunktionen brauchst du, wenn du Integrale ausrechnen sollst; die hast du also schon benutzt. Vielleicht wunderst du dich, dass es in der Definition heißt **eine** Stammfunktion, aber es ist ja klar, dass es mehrere gibt. Hast du eine Stammfunktion F gefunden, kannst du zu ihrem Term eine beliebige Konstante c hinzuaddieren, dann bekommst du wieder eine Stammfunktion G mit $G(x) = F(x) + c$ für alle $x \in [a, b]$. Mehr Stammfunktionen zu einem gegebenen f gibt es allerdings nicht. Du wirst mit dieser Aussage keine Probleme haben: den x -haltigen Teil von $F(x)$ darf man nicht verändern, weil sich sonst die Ableitung ändert. Dennoch gebe ich einen strengen Beweis, das heißt, ich leite diese Aussage aus dem Mittelwertsatz her: Wenn zwei Funktionen F und G auf $[a, b]$ die gleiche Ableitung f haben, hat ihre Differenz die Ableitung 0:

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Deshalb muss die Differenz konstant sein, wie das folgende Lemma zeigt:

5 Lemma

Es sei $U'(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann ist U konstant auf $[a, b]$, das heißt, es gilt $U(x) = U(a)$ für alle $x \in [a, b]$.

Beweis. Es sei $a < x \leq b$. Nach dem Mittelwertsatz ist dann

$$\frac{U(x) - U(a)}{x - a} = U'(z) \quad \text{für ein } z \text{ mit } a \leq z \leq x.$$

Aber da z in $[a, b]$ liegt, ist nach Voraussetzung $U'(z) = 0$. Es folgt $U(x) - U(a) = 0$, also $U(x) = U(a)$ für alle $x \in [a, b]$. \square

Wir verwenden das Lemma gleich, um eine interessante Eigenschaft der e -Funktion nachzuweisen. Du weißt ja, dass $(e^x)' = e^x$ ist. Es sei nun f eine Funktion, die ebenfalls diese Eigenschaft hat, für die also $f'(x) = f(x)$ ist für alle $x \in [a, b]$. Nach der Quotientenregel ist

$$\left(\frac{f(x)}{e^x} \right)' = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = \frac{f(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = 0 \quad .$$

Es folgt aus dem Lemma, dass

$$\frac{f(x)}{e^x} = b$$

ist für ein $b \in \mathbb{R}$, also dass $f(x) = be^x$ ist für alle $x \in [a, b]$. Folglich gilt dieser Satz:

6 Satz

Es sei $f'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Dann ist $f(x)$ von der Form be^x für eine feste Zahl b .

4.7 Die Integralfunktion, Stetigkeit und der Hauptsatz

Schau mal zurück: Wir haben mit einer Funktion $f(x)$ begonnen, die die lokale Änderungsrate einer Funktion F war: $f = F'$, und dann wollten wir wissen, um wieviel sich der Funktionswert von F in der „Zeit“ von a bis b ändert. Wenn wir a festhalten und b laufen lassen, wird daraus die Aufgabe, F nicht nur an einer Stelle, sondern in einem ganzen Intervall zu rekonstruieren. Unsere Aufgabe lautet dann:

$$\text{Berechne } I_a(x) := \int_a^x f(t) dt .$$

Hier musste ich die Integrationsvariable x in t umbenennen, denn sonst hätte ich für zwei verschiedene Dinge, nämlich die obere Grenze des Integrals und für das x in $f(x)$, den gleichen Buchstaben verwendet. Dem Integral ist die Umbenennung egal, im Ergebnis kommt das x aus dem $f(x)$ ja nicht mehr vor. – Bevor es nun weitergeht, will ich ermöglichen, dass x auch kleinere Werte als a annehmen kann:

7 Definition

Für $b < a$ setzen wir $\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx$.

Diese Funktion I_a heißt **Integralfunktion**, und $I_a(x)$ ist schlicht der orientierte Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x -Achse zwischen a und x . Um das Symbol nicht zu kompliziert zu machen, unterdrückt man das f ; man sieht am Symbol also nur noch die Stelle a , an der es losgeht.

Was soll dieser neue Begriff? Eine Gerade, die zur y -Achse parallel ist, überstreiche das „Flächenstück unter⁵ dem Graphen“ der Funktion f von $x = a$ aus nach rechts. Dann ist $I_a(x)$ der Inhalt der überstrichenen Fläche zwischen a und x . Das ist eine nützliche Vorstellung. Der zweite Grund besteht darin, dass wir Integrale sehr bequem mit Stammfunktionen ausrechnen konnten, aber die muss man erst einmal haben. Das I_a ist der erste Kandidat für eine Stammfunktion!

Nun ist dir bei einer Hausaufgabe, wenn du sie gemacht hast, ein seltsames Phänomen begegnet: Bei der Gaußklammerfunktion $x \mapsto [x]$, die jeder Zahl x die größte ganze Zahl zuordnet, die $\leq x$ ist, kannst du zwar für jedes x das Integral $F(x) := I_0(x) = \int_0^x [t] dt$ ausrechnen, aber diese Funktion ist nicht differenzierbar. Ihr Graph hat dort Ecken, wo die Gaußklammerfunktion Sprungstellen hat. Man kommt nicht durch Ableiten von F wieder zu f zurück – offensichtlich ist nicht jede Funktion f Ableitung einer anderen Funktion F .

Selbst, wenn die Funktion f im ganzen Definitionsbereich Ableitung einer anderen Funktion F ist, kann es Probleme mit dem Integral geben, wie uns das Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{mit der Stammfunktion} \quad F(x) = -\frac{1}{x}$$

zeigte. Rechnet man mit der Stammfunktion das Integral

$$\int_{-2}^3 \frac{1}{x^2} dx$$

aus, kommt ein negatives Ergebnis heraus, und das ist unsinnig, der Graph von f liegt ja ganz über der x -Achse. Bei dieser Funktion gibt es gleich zwei Probleme: Bei $x = 0$ hat der Definitionsbereich eine Lücke und für x gegen 0 strebt $f(x)$ gegen Unendlich. Es ist eigentlich klar, dass man da Acht geben muss.

⁵So nennt man kurz das Flächenstück zwischen Graph und x -Achse, selbst dann, wenn es unterhalb der x -Achse liegt.

Was muss man von einer Funktion f verlangen, damit das Integral $\int_a^b f(x) dx$ mit Hilfe einer Stammfunktion ausgerechnet werden kann? Sie darf keine Sprungstellen und keine Definitionslücken haben, soviel ist klar. Der technische Begriff für die Eigenschaft, die man fordern muss, heißt **Stetigkeit**. Der große Bernhard Riemann formulierte die Eigenschaft für Hörer, denen er keine formale Theorie beträchtlichen Umfangs und Kompliziertheit zumuten wollte, so: **man soll ihren Graphen im betrachteten Bereich zeichnen können, ohne den Bleistift abzusetzen**. Eine Funktion, die im Intervall $[a, b]$ diese Eigenschaft hat, wollen wir **stetig im Intervall** $[a, b]$ nennen.

Nun können wir einen zentralen Satz aussprechen und zum Teil auch beweisen:

8 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Es sei f stetig im Intervall $[a, b]$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Das Integral $I_a(x) = \int_a^x f(t) dt$ existiert für jedes $x \in [a, b]$.
2. Die Funktion I_a ist differenzierbar in $[a, b]$, und es ist $I'_a(x) = f(x)$.

Ein Beweis der ersten Aussage gehört zu der Theorie, auf die wir nicht eingehen können. Aber um die zweite Aussage wollen wir uns kümmern. Um $I'_a(x)$ zu berechnen, bilden wir den üblichen Ansatz:

$$\frac{I_a(x + \Delta x) - I_a(x)}{\Delta x} . \tag{9}$$

Im Zähler steht der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f zwischen x und $x + \Delta x$. Dividiert man den durch die Breite Δx , bekommt man eine Zahl, die höchstens so groß ist wie der maximale Funktionswert von f zwischen x und $x + \Delta x$ und mindestens so groß wie der minimale Funktionswert von f zwischen x und $x + \Delta x$. Nun kommt die Stetigkeit ins Spiel. Sie garantiert, dass es überhaupt einen kleinsten Funktionswert gibt: Da das Kurvenstück gezeichnet werden kann, ohne abzusetzen, kann es weder beliebig weit nach oben noch beliebig weit nach unten reichen. Eine waagerechte Strecke im Bereich zwischen x und $x + \Delta x$, die sich von unten dem Gebiet nähert, in dem das Kurvenstück verläuft, wird in einem Punkt an die Kurve anstoßen, und dieser Punkt (oder diese Punkte) haben den kleinsten Funktionswert. Verschiebt man die Strecke weiter nach oben, wird sie einen Punkt als letzten berühren, bevor der Kontakt abreißt, und der y -Wert dieses Punktes (oder dieser Punkte) ist der größte Funktionswert von f zwischen x und $x + \Delta x$. Und bei jedem y -Wert zwischen dem kleinsten und dem größten Funktionswert schneidet die Strecke die Kurve mindestens einmal.

Aus all dem folgt, dass

$$\frac{I_a(x + \Delta x) - I_a(x)}{\Delta x} = f(z)$$

ist für ein z zwischen x und $x + \Delta x$. Zu jedem Δx gibt es ein solches z zwischen x und $x + \Delta x$.

Lassen wir nun Δx gegen 0 laufen, muss das z gegen x laufen und das $f(z)$ gegen $f(x)$ – wieder wegen der Stetigkeit:

$$\frac{I_a(x + \Delta x) - I_a(x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f(x)$$

Aber dies bedeutet genau, dass $I'_a(x) = f(x)$ ist, wie behauptet. \square

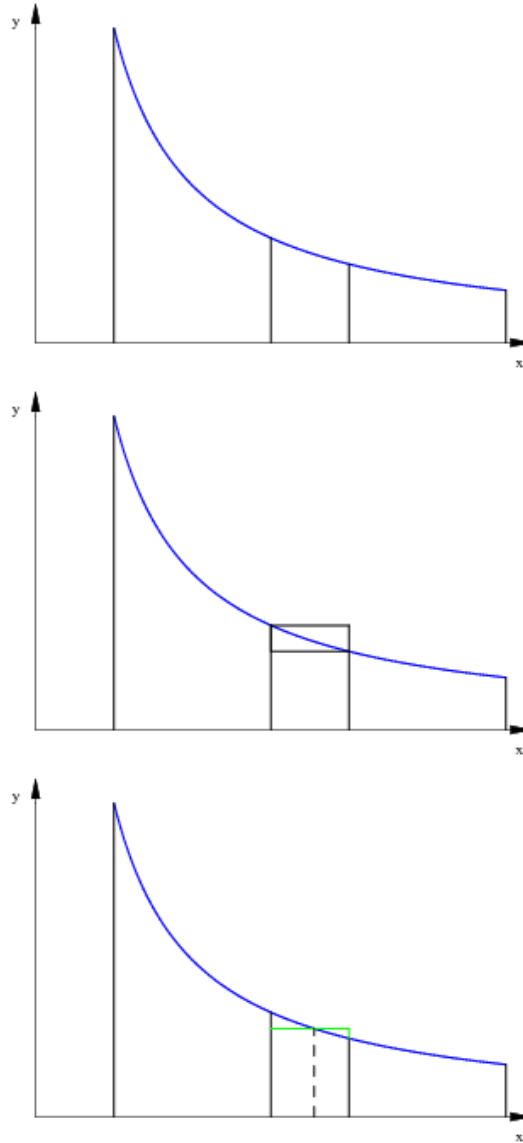


Abbildung 11: (Zum Beweis des Hauptsatzes) Im oberen Bild siehst du den Graphen von f mit den Markierungen bei $a, x, x + \Delta x$ und b . Nun ist $I_a(x + \Delta x)$ der Inhalt der Fläche von der ersten bis zur dritten, $I_a(x)$ der von der ersten bis zur zweiten und $I_a(x + \Delta x) - I_a(x)$ der von der zweiten bis zur dritten Markierung. Dividiert man diesen Inhalt durch die Breite Δx , bekommt man die mittlere Höhe (Julian) des Flächenstücks, jedenfalls eine Zahl zwischen dem kleinsten und dem größten Funktionswert, den f zwischen x und $x + \Delta x$ annimmt (mittleres Bild). Diese mittlere Höhe ist Funktionswert einer Zahl z zwischen x und $x + \Delta x$ (unteres Bild).

Karl fragt zu Recht, wie man beurteilt, ob eine Funktion stetig ist, deren Graphen man nicht vor Augen hat. Nun, alle ganzrationalen Funktionen sind stetig, Exponentialfunktionen, Sinus und Kosinus. Ferner sind Summen und Produkte stetiger Funktionen wieder stetig, sogar Quotienten dort, wo die Nennerfunktion $\neq 0$ ist. Die Stetigkeit ist verletzt, wo es Sprungstellen gibt, aber die sieht man von weit her. In aller Regel wirst du an dieser Stelle keine Probleme haben.

Aufgabe Es sei

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{für } -2 \leq x < 0 \\ 4-x^2 & \text{für } 0 \leq x \end{cases} .$$

Zeichne den Graphen von f , berechne

$$F(x) = I_{-2}(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$$

und zeichne den Graphen von F . Ist F eine Stammfunktion von f ?

5 Anwendungen der Integralrechnung

5.1 Volumenberechnung

Hier ist ein Bild eines Körpers⁶, wir wollen sein Volumen bestimmen.

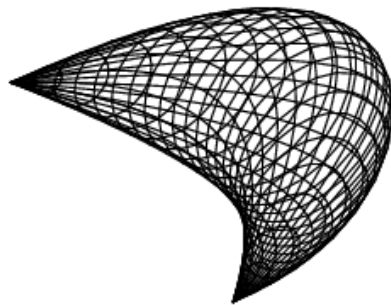


Abbildung 12: Bild eines bananenförmigen Körpers

Das stellen wir so an: Wir wählen eine Achse – das ist ganz wichtig, und das ist immer der erste Schritt! Hier legen wir eine Gerade durch die Enden des Körpers (siehe Abbildung 13).

Wir versehen die Achse mit einer Skala und stecken auf die Achse eine Ebene, die zu der Achse orthogonal ist, das heißt, die auf ihr senkrechtsteht (Abbildung 14).

Wenn wir die Ebene längs der Geraden verschieben, wird sie den Körper bei einem Skalenwert $x = a$ erreichen und ihn bei einem Skalenwert $x = b$ wieder verlassen; dabei können wir die Skala so orientieren, dass $a < b$ ist. Für jedes x zwischen a und b hat sie mit dem Körper eine Schnittfläche (siehe Abbildung 15).

⁶Dieser Abschnitt stellt eine gewisse Anforderung an dein räumliches Vorstellungsvermögen. Die Bilder habe ich am 15. November 2012 mit einem Teil des MuPAD-Arbeitsblattes parabelkoerper.mn erstellt – suche dort nach. Da kannst du die Bilder bewegen, sie sind zum Teil auch animiert. Vielleicht hilft dir das, probiere es aus.

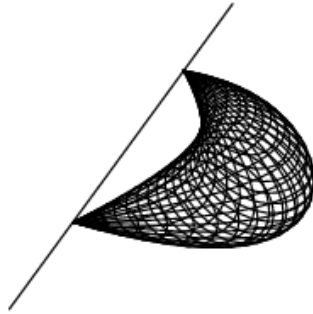


Abbildung 13: Körper mit Referenzachse

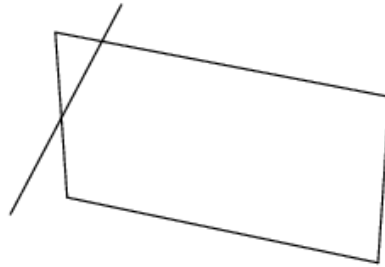


Abbildung 14: Referenzachse mit orthogonaler Ebene

Wenn $F(x)$ der Inhalt dieser Schnittfläche für den Skalenwert x ist, dann ist das Volumen des Körpers durch

$$V = \int_a^b F(x) dx \quad (10)$$

gegeben. Das haben wir so eingesehen: Wir schneiden den Körper durch Schnitte senkrecht zur Achse in Scheiben der Dicke Δx . Das Volumen der k -ten Scheibe ist dann etwa $F(x_k)\Delta x$ für einen x -Wert auf dem Teilstück der Achse, den die Schnitte, die die k -te Scheibe erzeugen, aus der Achse herauschneiden. Insgesamt ist das Volumen des Körpers etwa

$$\sum_{k=1}^n F(x_k)\Delta x \quad ,$$

und das ist eine Riemannsche Summe von F ; für n gegen Unendlich geht sie gegen das Integral in Gleichung (10).

Im allgemeinen Fall musst du die Achse geschickt legen, sonst gehst du unter; schließlich musst du ja das $F(x)$ bestimmen. Dabei gibt es zwei Spezialfälle, die häufig vorkommen:

5.1.1 Rotationskörper

Die Schale des Körpers wird erzeugt, indem man ein Stück des Graphen einer Funktion mit der Gleichung $y = f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b > a$ um die x -Achse

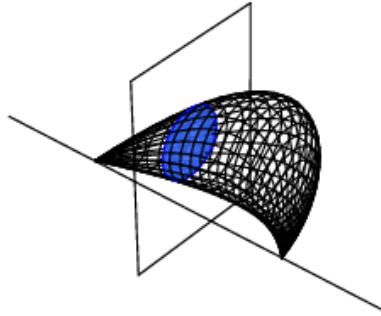


Abbildung 15: Eine Schnittfläche von Körper und Ebene

rotieren lässt. Als Referenzachse nimmst du natürlich die x -Achse. Die Schnittflächen sind Kreise, der Radius ist $|f(x)|$; es ist also $F(x) = \pi f(x)^2$. Das Volumen ist folglich

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx \quad . \quad (11)$$

Dieser Fall ist im Buch ordentlich beschrieben.

5.1.2 Doppelintegrale

Wenn du eine Funktion f in den Veränderlichen x und y hast, also eine Funktion in zwei Variablen, wie zum Beispiel

$$f(x, y) = 9 - y - x^2$$

und du das Volumen des Körpers zwischen der xy -Ebene und der durch $z = f(x, y)$ gegebenen Fläche im Raum über dem Rechteck $a \leq x \leq b$ und $c \leq y \leq d$ berechnen sollst, kannst du als Achse die y -Achse wählen. Der Inhalt der Schnittfläche des Körpers mit der Ebene parallel zur xz -Ebene beim Wert y der y -Achse ist

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad ,$$

das ganze Volumen folglich

$$V = \int_c^d F(y) dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \quad . \quad (12)$$

Vorsicht, es ist das **orientierte** Volumen, das du da berechnest.

6 Taylorpolynome und Taylorreihen

Wie berechnet man eigentlich Funktionswerte der e -Funktion? Wenn wir ehrlich sind, müssen wir einräumen, dass wir an harten Fakten nur

$$e^0 = 1 \quad \text{und} \quad (e^x)' = e^x \quad (13)$$

zur Hand haben, und es war in Wirklichkeit sogar so, dass wir nur angenommen haben, dass es eigentlich eine Basis a zwischen 2 und 3 so geben müsste, dass die Steigung der Tangente an den Graphen von $y = a^x$ im Punkt $(0, 1)$ exakt 1 ist.

Nun, wir werden sehen, dass die dürftigen Informationen in Gleichung (13) die e -Funktion auf ganz \mathbb{R} festlegen. Wir wissen, dass eine Tangente t an den Graphen einer Funktion f den Verlauf des Graphen in der Nähe des Berührungspunkts gut wiedergibt. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass der Berührungspunkt den x -Wert 0 hat. Das Kennzeichen der Tangente ist dann, dass t eine lineare Funktion ist und dass $t(0) = f(0)$ und dass $t'(0) = f'(0)$ ist. Wir verallgemeinern diesen Ansatz.

9 Satz

Eine Funktion f sei an der Stelle $x = 0$ n -mal differenzierbar. Dann gibt es genau eine ganzrationale Funktion

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad ,$$

die mit $f(x)$ an der Stelle 0 im Funktionswert und in den Werten der ersten n Ableitungen übereinstimmt.

Beweis. Wir schauen uns die k -te Ableitung von $p(x)$ an. Die Summanden

$$a_0, a_1x, \dots, a_{k-1}x^{k-1}$$

wurden zu Null. Für den Summanden a_kx^k gilt

$$(a_kx^k)^{(k)} = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots \cdots 1 \cdot a_k \quad .$$

Die k -ten Ableitungen der Summanden $a_{k+1}x^{k+1}, \dots, a_nx^n$ enthalten noch mindestens einen Faktor x , sie liefern also keinen Beitrag zu $p(0)$. Mit der Abkürzung

$$k! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \cdots k \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots \quad \text{und } 0! := 1$$

soll $p(x)$ folglich die Bedingungen

$$a_k k! = f^{(k)}(0) \quad \text{erfüllen für } k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Daraus folgt

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots, n \quad ,$$

es kommt also für $p(x)$ nur

$$p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (14)$$

in Frage. Es ist leicht einzusehen, dass dieses $p(x)$ auch tatsächlich die gestellte Bedingung erfüllt, damit ist der Satz bewiesen. \square

Unsere e -Funktion hat an der Stelle $x = 0$ den Funktionswert 0, und auch jede ihrer Ableitungen hat an der Stelle 0 den Wert 0. Die ganzrationale Funktion des Satzes ist deshalb besonders einfach:

$$p(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}x^k$$

Es wäre jetzt gründlich zu untersuchen, wie groß der Fehler maximal sein kann, der entsteht, wenn man e^x durch $p(x)$ ersetzt. Ich teile einfach mit, dass er gegen Null geht, wenn n gegen Unendlich läuft⁷. In der Tat gilt exakt

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \quad (15)$$

und diese unendliche Reihe heißt die **Taylorreihe** der e -Funktion.

Wie gut sich die Graphen der ganzrationalen Funktionen mit wachsendem Grad dem Graphen der e -Funktion annähern, zeigt die folgende Abbildung. Natürlich passt keine dieser Funktionen auf ganz \mathbb{R} , das zeigt schon das Wolkenbild. Aber der Bereich, in dem die Näherung brauchbar ist, wird größer. Soweit ich weiß, benutzt dein Taschenrechner solchen Näherungen, um für dich Funktionwerte der e -Funktion zu berechnen.

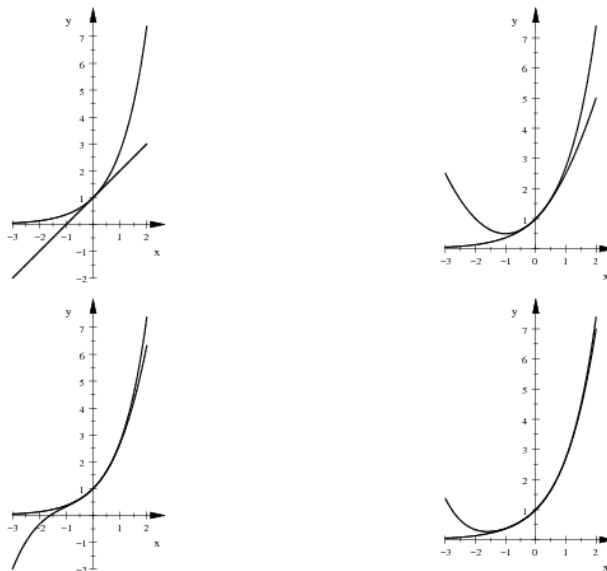


Abbildung 16: Taylorpolynome der e -Funktion der Grade 1,2,3,4

⁷Eine solche Untersuchung wäre ein schönes Thema einer Facharbeit.