

Lineare Algebra und Geometrie

LK13M2 Abitur 2006

22. März 2006

Inhaltsverzeichnis

1	Der Spaltenraum \mathbb{R}^n und einige Deutungen	3
1.1	Der Spaltenraum \mathbb{R}^n	3
1.2	Deutung eines Spaltenvektors als Liste	3
1.3	Geometrische Deutungen des \mathbb{R}^n	4
2	Matrizen	4
2.1	Die Vektor-Matrix-Schreibweise eines linearen Gleichungssystems	4
2.2	Matrixabbildungen	5
2.3	Matrixabbildungen des \mathbb{R}^2 und Geometrie der Ebene	5
2.4	Matrizenmultiplikation	6
2.5	Die inverse Matrix einer quadratischen Matrix	7
2.5.1	Eine zufällige Beobachtung	7
2.5.2	Die inverse Matrix	8
2.5.3	Konkrete Berechnung einer inversen Matrix	9
2.6	Fixvektoren, Eigenvektoren, Eigenwerte	9
2.6.1	Problemstellung	9
2.6.2	Eigenwerte und Eigenvektoren	10
2.6.3	Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren von 2×2 -Matrizen	10
3	Anwendung und Vertiefung	11
3.1	Kurzer Rückblick	11
3.2	Mehr zu Abbildungen der Ebene auf sich	12
3.2.1	Spiegelung an einer beliebigen Geraden durch den Nullpunkt	12
3.2.2	Verschiebungen	12
3.2.3	Drehung um einen Punkt M der Ebene um einen Winkel α	12
4	Etwas Geometrie im \mathbb{R}^n	13
4.1	Das Skalarprodukt - Länge, Winkel, Orthogonalität	13
4.2	Geraden	14
4.3	Ebenen	15
4.4	Normalenvektor und Koordinatengleichung einer Ebene	16
4.5	Fibel zur Geometrie des Raumes	17
4.6	Übungsblatt zur Konsolidierung	18
4.7	Matrixabbildungen des \mathbb{R}^3	19
4.8	Projektionen des \mathbb{R}^3 auf eine Ebene durch den Nullpunkt	20
5	Koordinaten	21
5.1	Einführende Bemerkungen	21

6	Kurven in der Ebene und im Raum	22
6.1	Einführung und Beispiele	22
6.2	Ortsveränderung, Bahngeschwindigkeit, Tangentialvektor	23
6.3	Parameterdarstellung und Bahnkurve	24
6.4	Die Länge eines Kurvenstücks	25
6.5	Übungsaufgaben	26
7	Änderungen, Änderungsraten und Gradient	26
8	Klausur 13.2	29
9	Diskrete Fouriertransformation	30
9.1	Problemstellung	30
9.2	Beispiele	31

1 Der Spaltenraum \mathbb{R}^n und einige Deutungen

1.1 Der Spaltenraum \mathbb{R}^n

Für eine natürliche Zahl n ist der Spaltenraum \mathbb{R}^n die Menge aller Spalten \vec{x} mit n reellen Einträgen x_1, x_2, \dots, x_n . Man nennt die Spalten auch **Vektoren**. Hier sind einige Beispiele solcher Spalten für $n = 2$ und für $n = 3$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \pi \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 35 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Diese Spalten sind die Grundobjekte der Linearen Algebra. Algebra hat mit Rechnen zu tun, und in der Tat rechnet man mit diesen Spalten. Man addiert Spalten **gleicher Größe** komponentenweise und bildet Vielfache solcher Spalten. Für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$ sieht das so aus:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ \vdots \\ ra_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

Übung Berechne für die Spalten aus dem Beispiel oben $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} + \vec{u}$, $\vec{b} + \vec{v}$, $7 \cdot \vec{d}$, $\frac{1}{2}\vec{u}$, $3\vec{a} + \sqrt{2}\vec{v}$.

Es ist klar, was $\vec{a} - \vec{b}$ bedeutet, berechne es für die Beispiele oben. Überhaupt kann man mit den Spalten so rechnen wie mit Zahlen, solange man nicht versucht, zwei Spalten zu multiplizieren. Versuche doch, die Gleichung $\vec{d} + \vec{x} = \vec{u}$ zu lösen, das heißt, bestimme einen Vektor \vec{x} , der die Gleichung löst!

1.2 Deutung eines Spaltenvektors als Liste

Schön und gut, wirst du vielleicht sagen, da kann man mit den Spalten rechnen - aber wozu? Schauen wir uns zwei praktische Beispiele an, bei denen man sich mit Gewinn geeigneter Spalten bedienen kann.

Die Stadt Espelkamp ist in mehrere Wahlbezirke eingeteilt. In jedem Wahlbezirk werden am Wahltag die Stimmen ausgezählt. Wie sollte man die Ergebnisse notieren, damit man die Daten aus den verschiedenen Bezirken leicht zusammenfassen kann? Natürlich in Listen. Klug ist, in allen Listen die Stimmzahlen der einzelnen Parteien jeweils an der gleichen Stelle zu notieren. Dann erhält man Spalten mit so vielen Einträgen, wie Parteien teilgenommen haben. Sagen wir, wir haben drei Bezirke und es haben drei Parteien teilgenommen. Wir bezeichnen die Ergebnisspalten der Bezirke mit \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} . Dann ist das Gesamtergebnis von Espelkamp durch $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ gegeben.

Zweites Beispiel: Der Baumarkt bietet zwei Kombipäckchen Schrauben an. Beide enthalten die drei gleichen Sorten Schrauben, aber in verschiedenen Anzahlen. Die Inhalte seien gegeben durch

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix},$$

mache dir die genaue Bedeutung dieser Aussage klar. Sagen wir, Herr Meyer brauche 76 Schrauben der Sorte 1, 46 Schrauben der Sorte 2 und 31 Schrauben der Sorte 3. Was soll er kaufen? Was soll ein Kunde tun, der 40 Schrauben von jeder Sorte braucht? Was macht ein Kunde, der 32 Schrauben von Sorte 1, 12 Schrauben von Sorte 2 und 2 Schrauben von Sorte 3 braucht? Und was macht ein Kunde, der 60 Schrauben von Sorte 1, 50 Schrauben von Sorte 2 und 90 Schrauben von Sorte 3 braucht? - Siehst du, da sind wir schon mitten in der Linearen Algebra.

1.3 Geometrische Deutungen des \mathbb{R}^n

Für $n = 2$ ist $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ einfach ein Zahlenpaar. Zahlenpaare sind uns schon als Koordinaten von Punkten der Ebene begegnet. Nichts und niemand kann uns hindern, und hinter dem $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ einen Punkt der Ebene vorzustellen, der die entsprechenden Koordinaten hat. Zu $\vec{0}$ gehört dann der Koordinatenursprung, zu $r\vec{x}$ der Bildpunkt des zu \vec{x} gehörigen Punktes bei zentrischer Streckung mit Streckzentrum Koordinatenursprung und Streckfaktor r . Anders gesagt: Wenn r die reellen Zahlen durchläuft, durchläuft $r\vec{x}$ die Punkte einer Geraden durch den Nullpunkt und durch den zu \vec{x} gehörenden Punkt.

Auch die Addition passt zur Geometrie: Die Punkte zu \vec{x}, \vec{y} und $\vec{x} + \vec{y}$ bilden zusammen mit dem Nullpunkt die Eckpunkte eines Parallelogramms (wenn sie nicht alle vier auf einer Geraden liegen).

Zum \mathbb{R}^3 gehört räumliche Geometrie. Für größere n haben wir keine geometrische Entsprechung mehr. Da geschieht dann etwas sehr Überraschendes. Man hält sich an den Spalten fest und denkt sich einfach Punkte eines n -dimensionalen Raumes, die durch die Spalten gegeben seien. Das ist sehr faszinierend. - Mal sehen, ob wir so weit kommen.

2 Matrizen

2.1 Die Vektor-Matrix-Schreibweise eines linearen Gleichungssystems

Eine Matrix A ist einfach ein rechteckig angeordneter Satz reeller Zahlen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Hier handelt es sich um eine Matrix mit n Zeilen und m Spalten; man sagt, A sei eine $n \times m$ -Matrix. Das Element $a_{i,j}$ steht in der i -ten Zeile und in der j -ten Spalte, i ist sein Zeilenindex und j sein Spaltenindex.

Matrizen sind ein ungemein nützliches Werkzeug, und sie kommen überall in der Mathematik vor. Uns sind sie in der Vektor-Matrix-Schreibweise linearer Gleichungssysteme begegnet. Ein lineares Gleichungssystem von n Gleichungen in m Variablen x_1, \dots, x_m und den rechten Seiten b_1, \dots, b_n schreiben wir so hin:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Auch ein riesiges Gleichungssystem mit einer Unzahl von Variablen und Gleichungen können wir damit kurz als $A\vec{x} = \vec{b}$ hinschreiben. Das macht den Blick frei.

Man fasst die linke Seite von Gleichung 3 tatsächlich als Produkt der Matrix A und des Vektors \vec{x} auf. Damit das funktioniert, definiert man das Produkt der Matrix und des Vektors entsprechend.

1 Definition

Das Produkt einer $n \times m$ -Matrix A und eines Vektors \vec{x} mit m Komponenten ist der folgende Vektor mit n Komponenten:

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1,j}x_j \\ \sum_{j=1}^m a_{2,j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{n,j}x_j \end{pmatrix} \quad (4)$$

2.2 Matrixabbildungen

Eine Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ von n Gleichungen in m Unbekannten ist ein Vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^m$, für den $A\vec{c} = \vec{b}$ ist. Das kennen wir ja. Nun kann man aber für einen beliebigen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ das Produkt $A\vec{x}$ bilden; das ist dann ein Vektor des \mathbb{R}^n . Noch einmal deutlich ausgesprochen: wir haben eine Vorschrift, die zu jedem Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ einen Vektor $A\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ liefert - und das ist nichts anderes als eine Abbildung¹ $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Eine solche Abbildung heißt **Matrixabbildung**, wir bezeichnen sie zum Beispiel mit φ . Hier sind einige übliche Schreibweisen.

$$\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi : \vec{x} \mapsto A\vec{x}, \quad \varphi(\vec{x}) = A\vec{x} .$$

Matrixabbildungen vertragen sich gut mit den Rechenarten $+$ und \cdot im \mathbb{R}^n :

2 Satz

Es sei $\varphi : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ eine Matrixabbildung mit einer $n \times m$ -Matrix A . Dann gilt für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$ und alle $r \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y}) \tag{5}$$

und

$$\varphi(r\vec{x}) = r\varphi(\vec{x}) . \tag{6}$$

Der Beweis ist nicht weiter tief Sinnig. Man rechnet für jede Gleichung die rechte und die linke Seite fertig aus, dann sieht man, dass da jeweils das Gleiche steht.

2.3 Matrixabbildungen des \mathbb{R}^2 und Geometrie der Ebene

Für $m = 2$ kennen wir geometrische Interpretationen des \mathbb{R}^m und der Rechenarten. Dass sich Matrixabbildungen mit den Rechenarten vertragen, hat zur Folge, dass sie auch die geometrische Struktur respektieren. Eine Matrixabbildung bildet eine Gerade durch den Nullpunkt auf eine Gerade durch den Nullpunkt (oder den Nullpunkt) ab. Die zu $\vec{0}, \vec{x}, \vec{x} + \vec{y}$ und \vec{y} gehörigen Punkte sind in der Regel Eckpunkte eines Parallelogramms, und das Gleiche gilt (in der Regel) für die vier Bildpunkte.

In der Tat ist es so, dass wir bekannte geometrische Abbildungen der Ebene auf sich mit Hilfe von Matrizen beschreiben können.

Abbildung	Matrix
Streckung mit Zentrum (0 0) und Faktor k	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
Scherung parallel zur x -Achse	$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Spiegelung an der x -Achse	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Spiegelung an der Geraden $y = x$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Drehung um den Nullpunkt um α	$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

¹In der Analysis nennt man eine Abbildung gewöhnlich Funktion, in der Algebra sagt man Abbildung. Es handelt sich um dieselbe Sache.

2.4 Matrizenmultiplikation

Wenn wir die Ebene erst an der Geraden $y = x$ spiegeln und anschließend noch an der x -Achse spiegeln², passiert folgendes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

Wir können uns nun fragen, ob es eine Matrixabbildung gibt, die gleich aus \vec{x} das Endergebnis macht. Die gibt es in der Tat. Ich notiere hier den entsprechenden Satz.

3 Satz

Führt man zwei Matrixabbildungen hintereinander aus, erhält man wieder einer Matrixabbildung.

Was bedeutet das? Nehmen wir zwei Matrizen A und B und betrachten wir die Matrixabbildungen, die durch sie gegeben sind. Die erste Matrix, A , sei eine $n \times m$ -Matrix. Man kann $A\vec{x}$ nur bilden, wenn \vec{x} ein m -Vektor ist, und $A\vec{x}$ ist dann ein n -Vektor. Damit man $A\vec{x}$ mit B multiplizieren kann, muss B genau n Spalten haben; die Anzahl der Zeilen ist egal. Es sei also B eine $k \times n$ -Matrix. Dann, sagt der Satz, gibt es eine $k \times m$ -Matrix C so, dass

$$B \cdot (A\vec{x}) = C\vec{x} \quad \text{ist für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^m. \quad (7)$$

Diese eindeutig bestimmte Matrix C wird einfach als Produkt von B und A aufgefasst: $C = BA$. Vorsicht, diese Multiplikation ist nicht kommutativ, du darfst die Reihenfolge der Faktoren nicht verändern.

Wie finden wir die Produktmatrix $C = A \cdot B$? Anders gefragt: Wie multipliziert man Matrizen? Hier hilft eine einfache Beobachtung.

4 Bemerkung

Es sei A eine $n \times m$ -Matrix. Wir setzen

$$\vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_m := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

das sind die sogenannten Einheitsvektoren des \mathbb{R}^m . Dann ist

$$A\vec{e}_i = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix}.$$

Das heißt: Die Spaltenvektoren der Matrix A sind genau die Bildvektoren der Einheitsvektoren des \mathbb{R}^m unter der Abbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$.

Wenn $B \cdot (A \cdot \vec{x}) = C \cdot \vec{x}$ sein soll für alle Vektoren \vec{x} der richtigen Größe, muss dies insbesondere für die Einheitsvektoren gelten. Nun ist $B \cdot (A\vec{e}_i) = B \cdot \vec{a}_i$ und $C \cdot \vec{e}_i = \vec{c}_i$, das heißt, dass der i -te Spaltenvektor \vec{c}_i von C das Produkt von B mit dem i -ten Spaltenvektor \vec{a}_i von A sein muss. Wenn man überhaupt Matrizen multiplizieren will, geht es nur so:

²Bei der zweiten Spiegelung musst du wirklich die x -Achse als Spiegelungsachse verwenden, nicht etwa die Gerade, in die die x -Achse bei der ersten Spiegelung abgebildet wird. Das Koordinatensystem bleibt bei all diesen Abbildungen unverändert, als wenn es nicht zur Ebene dazugehörte.

5 Definition

Es sei A eine $n \times m$ -Matrix mit den Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$, und es sei B eine $k \times n$ -Matrix. Dann ist die Produktmatrix BA von B und A die Matrix C mit den Spaltenvektoren $B\vec{a}_1, B\vec{a}_2, \dots, B\vec{a}_m$:

$$B \cdot A = B \cdot (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m) := (B\vec{a}_1, B\vec{a}_2, \dots, B\vec{a}_m) \quad (8)$$

Anders gesagt: Der Eintrag $c_{i,j}$ der Produktmatrix $C = BA$ ist gegeben durch

$$c_{i,j} = \sum_{\mu=1}^n b_{i,\mu} a_{\mu,j} \quad \text{für } 1 \leq i \leq k \text{ und } 1 \leq j \leq m.$$

Bleibt noch zu zeigen, dass $B(A\vec{x}) = C\vec{x}$ nicht nur für die Einheitsvektoren gilt, sondern für alle Vektoren \vec{x} der passenden Größe. Ich rechne das für $m = 2$ vor, sonst brauche ich Summenzeichen.

$$\begin{aligned} B(A\vec{x}) &= B \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = B(A(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2)) = B(xA(\vec{e}_1) + yA(\vec{e}_2)) = \\ &= xB(A(\vec{e}_1)) + yB(A(\vec{e}_2)) = xC\vec{e}_1 + yC\vec{e}_2 = C(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C\vec{x} \end{aligned}$$

Dabei benutze ich Satz 2 auf Seite 5.

Für das Produkt der Matrizen unseres Beispiels erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Das ist die Matrix einer Drehung um 90° im Uhrzeigersinn! Spiegelt man die Ebene erst an der Geraden $y = x$ und anschließend an der x -Achse, hat man die Ebene insgesamt um 270° gedreht.

Aufgabe Berechne für die Matrizen B und A des Beispiels auch die Matrix AB . Um was handelt es sich?

2.5 Die inverse Matrix einer quadratischen Matrix

In diesem Abschnitt lernst du die inverse Matrix einer quadratischen Matrix A kennen. Ich beginne mit Beispielmatrix aus dem Buch, die du multiplizieren solltest, und dabei kam eben die Einheitsmatrix heraus. Dann wird genau erklärt, was die inverse Matrix von A ist und wieso man davon überhaupt sinnvoll sprechen kann. Da wir nicht die Zeit haben, viel Theorie hochzufahren, habe ich die nötigen Schlüsse in einer längeren Argumentation direkt geführt. Es mag sein, dass du Probleme hast, den Überblick zu behalten. Du musst jedenfalls wissen, was die inverse Matrix einer Matrix A ist, wie man sie berechnet, wenn es sie gibt, und was ihre Existenz für das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ bedeutet.

2.5.1 Eine zufällige Beobachtung

Dir sind in Aufgaben aus dem Buch Beispiele für quadratische Matrizen A und B begegnet, deren Produkt die Einheitsmatrix ist. In diesem Fall hat man die volle Kontrolle über das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$. Es hat genau eine Lösung, nämlich $\vec{x} = B\vec{b}$. Das siehst du so: Es gilt

$$A\vec{x} = \vec{b} \implies B(A\vec{x}) = B\vec{b} \implies (BA)\vec{x} = B\vec{b} \implies \vec{x} = B\vec{b} ,$$

also hat das System höchstens die Lösung $B\vec{b}$. Und dieser Vektor ist tatsächlich Lösung, denn

$$A(B\vec{b}) = (AB)\vec{b} = E\vec{b} = \vec{b} .$$

2.5.2 Die inverse Matrix

Es sei das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ gegeben, und dabei sei A quadratische Matrix. Ein solches System bearbeiten wir mit dem Gaußschen Algorithmus:

- Wir addieren zu Zeilen Vielfache von anderen Zeilen,
- wir vertauschen gegebenenfalls Zeilen,
- wir multiplizieren Zeilen mit Faktoren $\neq 0$.

Wir versuchen, die Matrix mit diesen Werkzeugen erst auf Dreiecksform zu bringen, dann alle Einträge auf der Hauptdiagonalen auf 1 zu bringen und schließlich auch noch alle Einträge oberhalb der Hauptdiagonalen auf 0 zu bringen.³ Nun gibt es zwei Möglichkeiten: Wir kommen mit dem Programm durch, dann haben wir am Ende die Matrix A in die Einheitsmatrix umgewandelt, oder es tritt mindestens eine Zeile mit lauter Nullen auf. Im zweiten Fall hat das System keine Lösung oder gleich unendlich viele Lösungen.

Schauen wir uns nun den ersten Fall an. Das System ist in diesem Fall für jede rechte Seite \vec{b} eindeutig lösbar. Wir können als rechte Seite der Reihe nach sämtliche Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ einsetzen und bekommen jedesmal einen Lösungsvektor $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n$. Bilden wir aus diesen Spaltenvektoren die Matrix $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n)$, dann ist

$$AC = A(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n) = (A\vec{c}_1, A\vec{c}_2, \dots, A\vec{c}_n) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = E \quad . \quad (9)$$

Damit haben wir festgestellt, dass es zu unserem A eine sogenannte Rechtsinverse gibt. Dieses Zwischenergebnis halten wir fest und fahren mit der Untersuchung des ersten Falls fort:

Was die einzelnen Maßnahmen des Gaußschen Algorithmus leisten, können wir auch erreichen, indem wir die Matrix A von links mit bestimmten Matrizen multiplizieren. Um Schreibarbeit zu sparen, gebe ich hier nur drei konkrete Matrizen als Beispiele an: Soll das k -fache der ersten Zeile einer 3×3 -Matrix A zur zweiten Zeile addiert werden, erreicht man das, indem man A von links mit M_1 multipliziert. Entsprechend bewirkt die Multiplikation von A mit M_2 von links, dass die zweite Zeile von A mit r multipliziert wird, und Multiplikation mit M_3 vertauscht die zweite und die dritte Zeile von A .

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Das bedeutet nun folgendes: In dem Fall, dass sich die quadratische Matrix A mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus in die Einheitsmatrix umwandeln lässt, gibt es Matrizen $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ wie die M_i oben so, dass

$$B_m \cdot B_{m-1} \cdot B_{m-2} \cdot \dots \cdot B_1 \cdot A = E$$

ist.⁴ Die Matrix $B := B_m \cdot B_{m-1} \cdot B_{m-2} \cdot \dots \cdot B_1$ hat also die Eigenschaft, dass ihr Produkt mit A die Einheitsmatrix ergibt:

$$BA = E \quad (10)$$

Die Matrix B ist eine sogenannte Linksinverse von A .

Ich lasse nun noch eine kleine Rechnung mit den Matrizen A, B und C vom Himmel fallen, dann sind wir fertig: Matrizenmultiplikation ist assoziativ, es gilt also⁵

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C \quad .$$

³Diesen letzten Schritt haben wir bei praktischen Rechnungen in der Regel nicht gemacht, sondern die Variablen der Reihe nach ausgerechnet.

⁴In `linalg.mws` findest du ein durchgerechnetes Beispiel.

⁵Du solltest mit dem Lesen am besten in der Mitte beginnen und einmal nach rechts und einmal nach links lesen.

Folglich sind die Links- und die Rechtsinverse gleich und dadurch gleichzeitig eindeutig bestimmt. Diese eindeutig bestimmte Matrix bezeichnet man mit A^{-1} und nennt sie die **inverse Matrix** zu A .

In Abschnitt 2.5.1 hatten wir gesehen, dass aus der Existenz einer inversen Matrix zu A auch folgt, dass das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für jedes \vec{b} eindeutig lösbar ist. Das heißt aber, dass der Gaußsche Algorithmus dann auch ausführbar sein muss, bis A in die Einheitsmatrix umgewandelt ist, denn sonst gäbe es ja je nach \vec{b} entweder keine Lösung oder unendlich viele Lösungen des Gleichungssystems. Genau dann also hat A eine inverse Matrix, wenn sich A durch den Gaußschen Algorithmus in die Einheitsmatrix umwandeln lässt.

Das Resultat schreibe noch einmal ordentlich auf:

6 Satz

Es sei A eine quadratische Matrix.

1. Wenn sich A mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus in die Einheitsmatrix umwandeln lässt, dann gibt es eine eindeutig bestimmte Matrix A^{-1} so, dass $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ ist.
2. Wenn es eine Matrix B so gibt, dass $BA = E$ ist, dann kann man A mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus in die Einheitsmatrix umwandeln.

2.5.3 Konkrete Berechnung einer inversen Matrix

Es sei A eine quadratische Matrix. Wenn $AC = E$ sein soll, muss $A\vec{c}_i = \vec{e}_i$ sein. Wir müssen also, um die inverse Matrix einer $n \times n$ -Matrix A zu berechnen, die n linearen Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{e}_i$ lösen. Das ist lästig und fehleranfällig genug, aber weil die Systeme alle die gleiche Koeffizientenmatrix A haben, kann man sie simultan lösen. Ein durchgerechnetes Beispiel findest du in `linalg.mws`.

2.6 Fixvektoren, Eigenvektoren, Eigenwerte

2.6.1 Problemstellung

Du solltest die inverse Matrix zu

$$A := \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

berechnen. Das Ergebnis war $A^{-1} = A$, also $A^2 = E$, und deshalb hatte Niko vermutet, dass A Matrix einer Spiegelung ist. Wenn das stimmt, muss es eine Spiegelungsachse geben, und wenn \vec{x} zu einem Punkt dieser Achse gehört, muss $A\vec{x} = \vec{x}$ sein. In dieser Vektorgleichung steckt ein lineares Gleichungssystem für \vec{x} . Wir sehen uns die Koeffizientenmatrix an:

$$A\vec{x} = \vec{x} \iff A\vec{x} - \vec{x} = \vec{0} \iff A\vec{x} - E\vec{x} = \vec{0} \iff (A - E)\vec{x} = \vec{0}$$

Da schau, da habe ich auch gleich Matrizen addiert; es geschieht in natürlicher Weise. Jedenfalls ist die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems

$$A - E = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

die rechte Seite ist der Nullvektor.

Der Gaußsche Algorithmus liefert sofort als neue Matrix

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und die Lösungsmenge des Systems ist dann

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} .$$

Das ist offensichtlich eine Gerade durch den Nullpunkt mit dem Richtungsvektor $\vec{b} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$. Unsere Matrix könnte also die Matrix einer Spiegelung sein.

Wir fragen weiter: Wenn A wirklich Matrix einer Spiegelung ist, müsste es einen Vektor \vec{y} so geben, dass $A\vec{y} = -\vec{y}$ ist, und die Pfeile zu \vec{x} und zu \vec{y} sollten zu einander orthogonal sein.

Wir gehen nun vor wie eben:

$$A\vec{y} = -\vec{y} \iff A\vec{y} + \vec{y} = \vec{0} \iff (A + E)\vec{y} = \vec{0} .$$

Die Koeffizientenmatrix und die daraus nach Gauß hergestellte Matrix sehen so aus:

$$A + E = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß}} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Lösungsmenge hat wieder als Bild eine Gerade durch den Nullpunkt, ihre Richtung ist durch $\vec{c} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ gegeben.⁶ Es gibt also auch einen Vektor $\vec{c} \neq \vec{0}$ mit $A\vec{c} = -\vec{c}$. Dennoch handelt es sich **nicht** um die Matrix einer Spiegelung, denn die Pfeile zu \vec{b} und zu \vec{c} sind nicht orthogonal.

2.6.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Bei unserer Diskussion im vorigen Abschnitt suchten wir zu einer gegebenen Matrix A Vektoren $\vec{x} \neq \vec{0}$ mit $A\vec{x} = \vec{x}$ oder mit $A\vec{x} = -\vec{x}$. Allgemein interessiert man sich für Vektoren $\vec{x} \neq \vec{0}$ mit $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ für eine Zahl λ :

7 Definition

Ein Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ heißt **Eigenvektor** einer Matrix A zum **Eigenwert** $\lambda \in \mathbb{R}$, wenn $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ ist.

Von besonderem Interesse ist der Fall $\lambda = 1$:

8 Definition

Ein Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ heißt **Fixvektor** einer Matrix A , wenn $A\vec{x} = \vec{x}$ ist. Man spricht auch von einem **Fixvektor** der durch A gegebenen Matrixabbildung.

Du wirst an Beispielen noch eine Ahnung davon bekommen, wie wichtig Eigenvektoren und Eigenwerte sind. Hier nur eine ganz selbstverständliche Tatsache: die zu A gehörige Matrixabbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ lässt die von einem Eigenvektor \vec{x} erzeugte Gerade $\{r\vec{x} \mid r \in \mathbb{R}\}$ als Ganzes fest. Ist der Eigenvektor sogar Fixvektor, bleibt die Gerade punktweise fest.

9 Lemma

Wenn ein Vektor \vec{x} Eigenvektor einer Matrix A zum Eigenwert λ ist, dann ist auch $r\vec{x}$ Eigenvektor von A zum Eigenwert λ .

2.6.3 Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren von 2×2 -Matrizen

Der Ansatz ist klar: Man muss das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ lösen. Nehmen wir ein konkretes Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 4 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$$

⁶Die Rechnungen hier sind auch in linalg.mws zu finden (Untersuchung der Wirkung einer Matrix)

und der rechten Seite $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wenn wir das System auf eine vollständige Treppenform bringen können, ist es eindeutig lösbar, und die eindeutige Lösung muss dann $\vec{0}$ sein. Wir haben aber gesehen, dass mit \vec{x} auch jedes Vielfache $r\vec{x}$ Eigenvektor ist. Es kommt bei der Sache also nur etwas heraus, wenn sich das System **nicht** auf eine vollständige Treppenform bringen lässt.

Wenn $\lambda = 1$ ist, hat das System auch sofort wieder Treppenform. Wir können also von $\lambda \neq 1$ ausgehen. In dem Fall können wir die zweite Gleichung ersetzen durch ihr $(1 - \lambda)$ -faches und davon das 4-fache der erste Gleichung subtrahieren. Wir erhalten die neue Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 0 & (1 - \lambda)(3 - \lambda) - 16 \end{pmatrix} .$$

Wenn das System nicht eindeutig lösbar sein soll, muss

$$(1 - \lambda)(3 - \lambda) - 16 = 0$$

sein. Dies ist eine quadratische Gleichung für λ mit den Lösungen

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{17} .$$

Das sind die beiden Eigenwerte der Matrix A ! Für diese λ ist enthält die zweite Zeile der letzten Koeffizientenmatrix nur Nullen. Aus der ersten Gleichung bestimmen wir als Lösungsvektor zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 4 \\ \lambda - 1 \end{pmatrix} ,$$

die gesamte Lösungsmenge besteht aus allen Vielfachen dieses Vektors. Halten wir das Ergebnis fest: A hat die Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 + \sqrt{17} \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } 2 + \sqrt{17} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 - \sqrt{17} \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } 2 - \sqrt{17} .$$

Damit ist unser Problem gelöst. Größere Matrizen als 2×2 -Matrizen können wir leider nicht behandeln, weil unsere Zeit uns nicht erlaubt, uns mit Determinanten zu beschäftigen. Immerhin kannst du solche Matrizen Maple vorwerfen. Wenn du das Paket *linalg* geladen hast, stehen dir die Befehle *eigenvalues* und *eigenvectors* zur Verfügung. Du kannst ja unser handgerechnetes Beispiel damit nachrechnen.

3 Anwendung und Vertiefung

3.1 Kurzer Rückblick

Im Kapitel 2 hast du gelernt, was eine Matrix ist, wie man damit Abbildungen beschreibt und wie man Matrizen multipliziert. Vielleicht tatest du dich schwer mit der Herleitung, warum man Matrizen eben so multipliziert, wie man es tut. Das hat keine bleibenden negativen Folgen. Du musst natürlich wissen,

1. wie man Matrizen multipliziert,
2. dass die Produktmatrix BA von zwei Abbildungsmatrizen A zu $\varphi : \vec{x} \mapsto \varphi(\vec{x})$ und B zu $\psi : \vec{y} \mapsto \psi(\vec{y})$ zu der Abbildung $\vec{x} \mapsto \psi(\varphi(\vec{x}))$ gehört,
3. dass der i -te Spaltenvektor \vec{a}_i der Matrix A zu φ der Bildvektor des i -ten Einheitsvektors \vec{e}_i ist: $\vec{a}_i = \varphi(\vec{e}_i) = A\vec{e}_i$
4. und dass mit den obigen Bezeichnungen $A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_m\vec{a}_m$ ist.

Das kennst du schon alles - bis auf den letzten Punkt, und dessen Aussage siehst du ein, wenn du den Vektor $A\vec{x}$ ausschreibst und geeignet zerlegst. Inhaltlich kennst du das schon von den Abbildungen der Ebene! Allgemein ist jeder Vektor \vec{x} eine sogenannte Linearkombination $x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_m\vec{e}_m$ der Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m$, und die durch A gegebene Matrixabbildung bildet \vec{x} auf die entsprechende Linearkombination $x_1A\vec{e}_1 + x_2A\vec{e}_2 + \dots + x_mA\vec{e}_m$ der Bildvektoren der Einheitsvektoren ab, und das sind ja gerade die Spaltenvektoren der Matrix.

3.2 Mehr zu Abbildungen der Ebene auf sich

3.2.1 Spiegelung an einer beliebigen Geraden durch den Nullpunkt

Wir beginnen mit einem Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ des \mathbb{R}^2 und betrachten die Menge

$$\langle \vec{a} \rangle := \{r\vec{a} \mid r \in \mathbb{R}\} .$$

Die sieht zwar gefährlich aus, dahinter verbirgt sich aber geometrisch nur die Gerade durch den Nullpunkt des Koordinatensystems, die \vec{a} als sogenannten Richtungsvektor hat. Nun wollen wir die Ebene an dieser Geraden spiegeln. Die durch die Spiegelung gegebene Abbildung der Ebene auf sich bezeichnen wir mit σ . Wir können σ mit Hilfe einer Matrix beschreiben. Eine Möglichkeit, diese Matrix zu erhalten, sieht so aus: Wir drehen die Ebene um den Nullpunkt so, dass \vec{a} auf die (positive) x -Achse gedreht wird, spiegeln an der x -Achse und drehen dann wieder zurück. Anschließend ist die Ebene, wie gewünscht, an der Geraden gespiegelt.

Führen wir das Programm durch. Wenn wir die Komponenten von \vec{a} mit a_1 und a_2 bezeichnen, gehört zu \vec{a} ein Pfeil der Länge $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Folglich gehört zu

$$\frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

ein Pfeil, der in die gleiche Richtung zeigt wie \vec{a} , dessen Spitze aber auf dem Einheitskreis liegt. Deshalb sind die Komponenten dieses Vektors der Kosinus- und der Sinuswert des Winkels, den \vec{a} mit der positiven x -Achse bildet. Wir erinnern uns, dass $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ und $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ ist, dann können wir die benötigten Drehmatrizen hinschreiben: Die Matrix S der Spiegelung σ ist gegeben durch

$$S = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe Rechne nach, dass das Produkt der beiden Drehmatrizen die Einheitsmatrix ist.

3.2.2 Verschiebungen

Nun, das ist nicht weiter schwierig. Es sei \vec{v} ein fester Vektor. Durch die Abbildung

$$\tau : \vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{v}$$

ist eine Verschiebung der Ebene gegeben. Sie bildet den Nullvektor auf \vec{v} ab. Das heißt, dass die Abbildung für $\vec{v} \neq \vec{0}$ nicht durch eine Matrix beschrieben werden kann, denn für jede Matrix M ist $M\vec{0} = \vec{0}$.

3.2.3 Drehung um einen Punkt M der Ebene um einen Winkel α

Diese Drehung bekommen wir mit der oben schon angewandten Methode in den Griff. Wir verschieben die Ebene um $-\vec{m}$, drehen um den Nullpunkt um den gewünschten Winkel α und verschieben die gedrehte Ebene wieder um \vec{m} . Dann ist sie um α um den durch \vec{m} gegebenen Punkt gedreht. Wenn wir die Drehmatrix mit $M(\alpha)$ bezeichnen, ist die Abbildung ist also gegeben durch

$$\vec{x} \mapsto \vec{x} - \vec{m} \mapsto M(\alpha) \cdot (\vec{x} - \vec{m}) \mapsto M(\alpha) \cdot (\vec{x} - \vec{m}) + \vec{m} ,$$

also durch

$$\vec{x} \mapsto M(\alpha)\vec{x} - M(\alpha) \cdot \vec{m} + \vec{m} .$$

4 Etwas Geometrie im \mathbb{R}^n

4.1 Das Skalarprodukt - Länge, Winkel, Orthogonalität

Wir sind gewohnt, uns Vektoren des \mathbb{R}^2 als Pfeile vorzustellen, die im Nullpunkt beginnen, und manchmal denken wir auch nur an die Punkte der Ebene, die durch die Pfeilspitzen markiert sind. Der Spaltenraum \mathbb{R}^2 ist das, was zählt, aber die geometrische Veranschaulichung in der Ebene ist sehr hilfreich, und sie eröffnet den Weg zu zahlreichen Anwendungen.

Nun das konkrete **Problem**: Es seien zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Kann man den Vektoren ansehen, ob die zugehörigen Pfeile auf einander senkrechtstehen? Das ist dann der Fall, wenn in dem Dreieck OAB der Satz des Pythagoras gilt, also wenn - in den üblichen Bezeichnungen -

$$a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$$

ist. Wir vereinfachen diese Gleichung und erhalten als Bedingung dafür, dass die Pfeile zu \vec{a} und \vec{b} auf einander senkrechtstehen, folgende Gleichung:

$$a_1b_1 + a_2b_2 = 0 \tag{11}$$

Man spürt sofort, dass der Term auf der linken Seite der Gleichung ein nützliches Werkzeug ist! Wir fassen gleich zu.

10 Definition

Für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ definieren wir das **Skalarprodukt** $\vec{a} * \vec{b}$ durch

$$\vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = \sum_{i=1}^n a_ib_i \ .$$

Mit dem neuen Werkzeug können wir sagen, dass für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ die zugehörigen Pfeile genau dann auf einander senkrechtstehen, wenn $\vec{a} * \vec{b} = 0$ ist. Ferner können wir die Länge des Pfeils zu \vec{a} mit Hilfe des Skalarprodukts als $\sqrt{\vec{a} * \vec{a}}$ schreiben. Für Pfeile im Raum gilt das auch, deshalb definiert man kühn wie folgt:

11 Definition

Es seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Wir nennen \vec{a} und \vec{b} **orthogonal** genau dann, wenn $\vec{a} * \vec{b} = 0$ ist, und wir definieren die **Länge** von \vec{a} als

$$|\vec{a}| := \sqrt{\vec{a} * \vec{a}} \ .$$

Dadurch versteht man den Spaltenraum \mathbb{R}^n quasi mit einer Geometrie! Und für $n = 2$ und für $n = 3$ erhalten wir natürlich wieder unsere vertrauten geometrischen Begriffe.

Anmerkung Auf eine Besonderheit muss ich dich hier hinweisen: In der Definition der Orthogonalität von Vektoren im \mathbb{R}^n fehlt die Forderung, dass die Vektoren von $\vec{0}$ verschieden sein müssen. Diese Forderung brächte ständig äußerst lästige Fallunterscheidungen mit sich, und das will man nicht. Allerdings nimmt man dadurch in Kauf, dass der Nullvektor zu jedem anderen Vektor orthogonal ist.

Kommen wir nun zu den Winkeln. Mit Hilfe des Kosinussatzes können wir den Kosinus des Winkels φ berechnen, den die Pfeile zu $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ bilden. Es kommt dabei Folgendes heraus:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Das geht natürlich nur für von $\vec{0}$ verschiedene Vektoren \vec{a}, \vec{b} !

Für den Kosinus des Winkels zwischen den Pfeilen im Raum zu Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ kommt das Gleiche heraus. Da ahnst du schon, was kommt:

12 Definition

Für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ nennen wir den **Winkel** zwischen den Vektoren den Winkel φ zwischen 0° und 180° mit

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} .$$

Ich schließe diesen Abschnitt mit einem praktischen Hinweis. Oft hat man drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ und interessiert sich für das Dreieck ABC , dessen Eckpunkte durch die Vektoren gegeben sind. Der Innenwinkel α beim Punkt A ist der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{c} - \vec{a}$! Die Pfeile zu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ zeigen in aller Regel **nicht** in Richtung der Dreieckseiten. Mache dir das anhand einer Zeichnung klar, am besten für $n = 3$.

4.2 Geraden

Wir wollen Geraden in der Ebene und im Raum mit Hilfe unserer Spaltenvektoren beschreiben und dadurch geometrische Probleme algebraisch behandeln können. Beginnen wir mit Geraden durch den Nullpunkt. Man braucht den Ortsvektor (Pfeil) eines Punktes der Geraden und erhält die anderen Punkte, indem man den Pfeil staucht oder streckt, eventuell mit negativen Streckfaktoren. Das lässt sich im \mathbb{R}^n leicht nachbauen.

13 Definition

Unter dem **Erzeugnis** eines Vektors $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ verstehen wir die Menge aller Vielfachen von \vec{a} :

$$\langle \vec{a} \rangle := \{ r\vec{a} \mid r \in \mathbb{R} \}$$

Geometrisch bedeutet $\langle \vec{a} \rangle$ für $\vec{a} \neq \vec{0}$ eine Gerade durch den Nullpunkt.

Wenn wir eine Gerade erfassen wollen, die nicht durch den Nullpunkt geht, nehmen wir eine Gerade durch den Nullpunkt und verschieben sie. Mit Hilfe einer neuen Schreibweise lässt sich das leicht hinschreiben:

14 Definition

Für $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$\vec{a} + M := \{ \vec{a} + \vec{m} \mid \vec{m} \in M \} .$$

Dann ist nämlich für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{b} \neq \vec{0}$ durch $\vec{a} + \langle \vec{b} \rangle$ eine Gerade gegeben, die parallel zu der Ursprungsgeraden zu $\langle \vec{b} \rangle$ ist und die durch den Punkt zu \vec{a} geht. Man nennt \vec{b} **Richtungsvektor** und \vec{a} **Aufpunkt** der Geraden. Dabei ist aber \vec{a} keineswegs ein besonderer Punkt der Geraden, man kann jeden ihrer Punkte als Aufpunkt verwenden. Als Richtungsvektor ist außer \vec{b} auch jedes Vielfache $r\vec{b}$ mit $r \neq 0$ geeignet.

Oft hat man zwei Geradendarstellungen $\vec{a} + \langle \vec{b} \rangle$ und $\vec{c} + \langle \vec{d} \rangle$ und muss untersuchen, ob es sich überhaupt um verschiedene Geraden handelt.⁷ Dazu prüft man zunächst, ob $\langle \vec{b} \rangle = \langle \vec{d} \rangle$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $\vec{b} = r\vec{d}$ ist für ein $r \in \mathbb{R}$. Falls dies erfüllt ist, sind die Geraden jedenfalls schon einmal parallel. In diesem Fall prüft man zusätzlich, ob meinetwegen der Aufpunkt der zweiten Geraden auf der ersten liegt. Dazu betrachtet man das durch

$$\vec{c} = \vec{a} + r\vec{b}$$

gegebene Lineare Gleichungssystem. Es ist ein $n \times 1$ -Gleichungssystem, dennoch solltest du es sachgerecht behandeln, also Gauß-Umformungen anwenden.

Die Gerade g , die durch die Punkte zu zwei gegebenen Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ geht, können wir sofort hinschreiben:

$$g = \vec{a} + \langle \vec{b} - \vec{a} \rangle$$

⁷Natürlich muss $\vec{c} \neq \vec{0}$ und $\vec{d} \neq \vec{0}$ sein, sonst liegen keine Geraden vor.

Diese Darstellung leidet an einer gewissen Asymmetrie, \vec{a} und \vec{b} sind nicht gleichberechtigt. Es gibt eine schönere Darstellung ohne diesen Defekt:

$$g = \{ r\vec{a} + s\vec{b} \mid r + s = 1 \}$$

Sucht man nach einem Schnittpunkt von $g = \vec{a} + \langle \vec{b} \rangle$ und $h = \vec{c} + \langle \vec{d} \rangle$, setzt man

$$\vec{a} + r\vec{b} = \vec{c} + s\vec{d}$$

und löst das $n \times 2$ -Gleichungssystem für r und s , das dadurch gegeben ist.

Warnung: Für $n \geq 3$ müssen Geraden, die keinen Schnittpunkt haben, keineswegs parallel sein. Solche Geraden nennt man **windschief** (zu einander).

4.3 Ebenen

Beginnen wir mit einer Ebene im Raum, die den Nullpunkt enthält. Die entsprechende Vektormenge bekommen wir, wenn wir das Erzeugnis zweier Vektoren bilden, die nicht Vielfache von einander sind.

15 Definition

Unter dem **Erzeugnis** zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ verstehen wir die Menge aller Linearkombinationen dieser Vektoren:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := \{ r\vec{a} + s\vec{b} \mid r, s \in \mathbb{R} \}$$

Eine solche Ebene durch den Nullpunkt können wir verschieben. Eine beliebige Ebene lässt sich also in der Form

$$\varepsilon = \vec{c} + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

schreiben. Dabei dürfen \vec{a} und \vec{b} nicht Vielfache von einander sein.

Du zeichnest dir eine Ebene dieser Bauart am besten, indem du das von \vec{a} und \vec{b} gebildete Parallelogramm zeichnest - der Nullpunkt gehört zu diesem Parallelogramm! - und es dann auf die Spitze des Pfeils zu \vec{c} setzt.

Eine ganz andere Ausgangssituation liegt vor, wenn du drei Raumpunkte A, B und C hast und die Ebene ε suchst, die durch die drei Punkte gegeben ist. Das klappt natürlich nur einwandfrei, wenn die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen! Mit Hilfe der zugehörigen Ortsvektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} kannst du die Ebene in der folgenden Form hinschreiben:

$$\varepsilon = \vec{a} + \langle \vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{a} \rangle$$

Dadurch machst du A zum Aufpunkt bzw. \vec{a} zum Stützvektor.

Willst du nun herausfinden, ob ein Punkt D zur Ebene $\vec{a} + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ gehört, musst du prüfen, ob sich \vec{d} in der Form darstellen lässt, die die Punkte der Ebene haben. Du setzt also an

$$\vec{d} = \vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c}$$

und behandelst das dadurch gegebene 3×2 -System für r und s nach den Regeln unserer Zunft. Ist es lösbar, liegt der Punkt in der Ebene, und sonst nicht.

Ein durchgerechnetes Beispiel wird hier wohl nicht nötig sein, du musst dich aber unbedingt selbst mit dem Gegenstand vertraut machen.

Eine Ebene $\varepsilon = \vec{a} + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ als Menge ist schnell hingeschrieben. Du beherrscht sie aber erst, wenn dir geläufig ist, dass du einen beliebigen Vektor aus ε in der Form

$$\vec{x}(r, s) = \vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c} \tag{12}$$

schreiben kannst. Manche geben die Ebene sogar in dieser Form an; sie schreiben so etwas wie $\varepsilon : \vec{x}(r, s) = \vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c}$, und manchmal wird das (r, s) bei \vec{x} auch noch weggelassen.

Wenn die Punkte zu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ nicht auf einer Geraden liegen, bestimmen sie eindeutig eine Ebene ε , und die Punkte dieser Ebene sind genau die Punkte, die zu den Vektoren der Form $\vec{a} + r(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})$ gehören - das weißt du ja nun. Diese Darstellung wird aber nicht der Symmetrie gerecht, die zwischen den drei Vektoren besteht. Hier gibt es, wie bei den Geraden, eine schönere Darstellung, und zwar diese: Zur Ebene ε durch die Punkte zu \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} gehören genau die Punkte, die sich in der Form

$$r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \quad \text{mit } r + s + t = 1$$

schreiben lassen.

4.4 Normalenvektor und Koordinatengleichung einer Ebene

Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung in drei Variablen, also eines 1×3 -Systems, lässt sich leicht hinschreiben. Nehmen wir ein Beispiel: Zur Gleichung

$$x - 2y + 4z = 0$$

gehört die Lösungsmenge

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \left\{ \begin{pmatrix} 2y - 4z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \end{aligned}$$

und dahinter steckt eine Ebene durch den Nullpunkt.

Wir bemerken, dass wir unsere Gleichung auch in der Form $\vec{n} * \vec{x} = 0$ schreiben können:

$$x - 2y + 4z = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

die Lösungsmenge besteht aus allen Vektoren, die zu dem aus den Koeffizienten der Gleichung gebildeten Vektor \vec{n} orthogonal sind. Wenn wir uns \vec{n} als Pfeil vorstellen, ist die Lösungsmenge die Ebene durch den Nullpunkt, die auf dem Pfeil zu \vec{n} senkrecht steht.

In gleicher Weise können wir die Lösungsmenge der Gleichung

$$x - 2y + 4z = 5$$

in der Form

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

schreiben. Geometrisch handelt es sich dabei um die Ebene von oben, um 5 nach rechts verschoben.

Es lohnt sich, über diese Sache noch etwas nachzudenken. Die Vektoren des \mathbb{R}^3 , deren Skalarprodukt mit einem festen Vektor $\vec{n} \neq \vec{0}$ einen festen Wert hat, gehören zu einer Ebene im Raum!

Es klingt zwar seltsam, aber oft kommt man bei Problemen mit Ebenen schneller und einfacher zum Ziel, wenn man nur mit den Gleichungen der Ebenen arbeitet und sie nicht als Erzeugnis

beziehungsweise als Summe eines festen Vektors und eines Erzeugnisses hinschreibt. Will man wissen, ob ein Punkt zur Ebene mit der Gleichung $x - 2y + 4z = 5$ gehört, schaut man einfach nach, ob seine Koordinaten die Gleichung erfüllen. Sucht man den Schnittpunkt einer Geraden $g : \vec{x}(t) = \vec{a} + t\vec{b}$ mit der Ebene, setzt man den allgemeinen Vektor der Geraden in die Gleichung ein und rechnet t aus. Das ist schnell gemacht, und man muss nicht erst ein 3×3 -System lösen. Die Schnittgerade zweier Ebenen ist die Lösungsmenge des Systems, das man erhält, wenn man die beiden Gleichungen der Ebenen zu einem 2×3 -Gleichungssystem zusammenfasst - man spart ein 3×4 -System. Achte mit darauf, dass wir einige solcher Beispiele rechnen und ich nicht denke, das wissest du schon von selbst.

4.5 Fibel zur Geometrie des Raumes

Nein, du kannst räumliche Geometrie nicht, ohne dass wir das einüben - wie konnte ich das nur denken. Also buchstabieren wir einige Dinge durch. Ich rechne aber nur mit den Vektoren, nicht mit konkreten Spalten.

Beginnen wir mit einer Ebene ε . Sie sei durch ihre Gleichung gegeben:

$$\varepsilon : n_1x + n_2y + n_3z = d \quad (13)$$

Wenn man die Koeffizienten n_1, n_2, n_3 als Einträge eines Vektors \vec{n} auffasst, kann man die Ebenengleichung in der Form

$$\vec{n} * \vec{x} = d \quad (14)$$

schreiben, und \vec{n} ist Normalenvektor der Ebene.

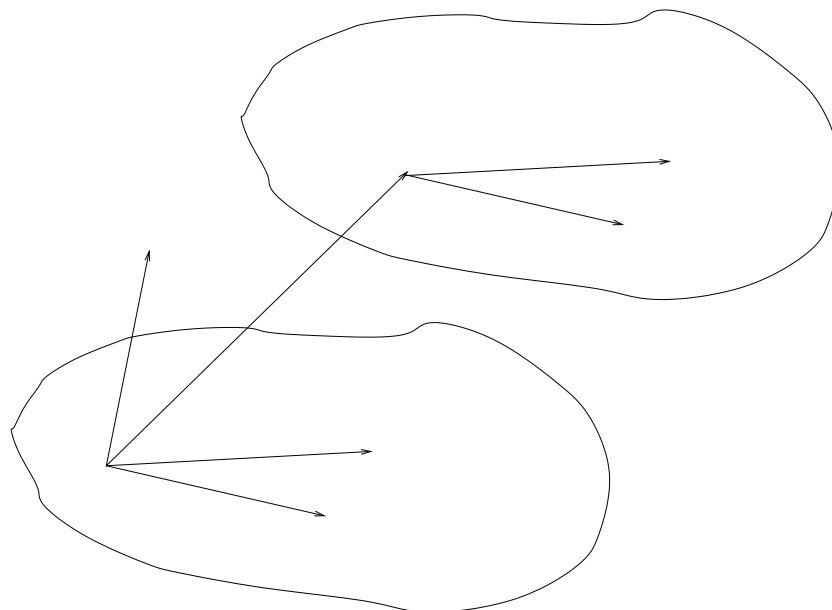


Abbildung 1: Ebene im Raum

Die Situation ist in Abbildung 1 dargestellt. Die beiden Pfannkuchen stehen für die Ebene ε und die dazu parallele Ebene ε' durch den Nullpunkt; letztere lässt sich als Erzeugnis $\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ zweier Vektoren schreiben, und sie ist Lösungsmenge des 1×3 -Gleichungssystems $\vec{n} * \vec{x} = 0$. Die beiden Vektoren \vec{b}, \vec{c} sind in der Zeichnung dargestellt, und zwar sind es die beiden Pfeile in dem unteren Pfannkuchen. Es ist $\varepsilon = \vec{a} + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ die Lösungsmenge von $\vec{n} * \vec{x} = d$, als Stützvektor \vec{a} kannst jeden beliebigen Vektor von ε nehmen. Es ist klar, welcher Pfeil zu \vec{a} gehören soll. Dann ist nur noch ein Pfeil übrig, der im Nullpunkt beginnt. Das soll natürlich \vec{n} sein. Nein, \vec{n} ist in der Regel **kein** Stützvektor.

Es folgt eine Liste von Grundaufgaben mit knappen Lösungshinweisen.

1. Gegeben $\vec{n} * \vec{x} = d$. Finde Darstellung $\varepsilon = \vec{a} + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$.
Löse dazu das 1×3 -System $\vec{n} * \vec{x} = d$.
2. Gegeben $\varepsilon = \vec{a} + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$. Finde Gleichung $\vec{n} * \vec{x} = d$.
Die Lösungsmenge des 2×3 -Systems $\vec{b} * \vec{n} = 0$, $\vec{c} * \vec{n} = 0$ ist eine Gerade durch den Nullpunkt, sonst stimmt etwas nicht. Nimm als \vec{n} einen bequemen Vektor, der die Gerade erzeugt. Die Zahl d auf der rechten Seite der Gleichung ist dann $\vec{n} * \vec{a}$.
3. Es sei ε die Ebene durch drei gegebene Punkte $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Finde eine Gleichung!
Es ist dann $\varepsilon = \vec{a} + \langle \vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{a} \rangle$. Weiter wie im vorigen Punkt.
4. Es sei $\varepsilon : \vec{n} * \vec{x} = d$ gegeben. Welchen Abstand hat die Ebene vom Nullpunkt, welchen von einem Punkt \vec{p} ?
Um den Abstand der Ebene vom Nullpunkt zu gewinnen, brauchst du den Schnittpunkt der von \vec{n} erzeugten Ursprungsgeraden mit der Ebene. Der ist leicht zu finden: Er muss sich in der Form $t\vec{n}$ darstellen lassen, und wenn er in der Ebene liegen soll, muss

$$\vec{n} * (t\vec{n}) = d$$

sein. Es folgt

$$t = \frac{d}{\vec{n} * \vec{n}} .$$

Der gesuchte Abstand der Ebene vom Nullpunkt ist dann

$$|t\vec{n}| = \left| \frac{d}{\vec{n} * \vec{n}} \vec{n} \right| = \left| \frac{d}{\sqrt{\vec{n} * \vec{n}}} \right| .$$

Du siehst, dass d keineswegs der Abstand der Ebene vom Nullpunkt ist; das stimmt nur, wenn die Länge von \vec{n} gerade 1 ist.

Um den Abstand der Ebene von einem Punkt \vec{p} zu bestimmen, machst du im Prinzip die gleiche Rechnung: Der Lotfußpunkt ist nun von der Form $\vec{p} + t\vec{n}$. Weiter:

$$\vec{n} * (\vec{p} + t\vec{n}) = d \implies t = \frac{d - \vec{p} * \vec{n}}{\vec{n} * \vec{n}} .$$

Der gesuchte Abstand ist die Länge von $t\vec{n}$.

5. Spiegele den Punkt \vec{p} an der Ebene $\varepsilon : \vec{n} * \vec{x} = d$
Bestimme wieder $t \in \mathbb{R}$ so, dass $\vec{p} + t\vec{n}$ in ε liegt. Dann ist der gespiegelte Punkt schlicht $\vec{p} + 2t\vec{n}$, fertig.

4.6 Übungsblatt zur Konsolidierung

Die folgenden Übungsaufgaben sollen dir helfen, dir die neuen Begriffe anzueignen. Bearbeite sie gründlich und gewissenhaft.

1. Schreibe ein Beispiel für eine Gleichung hin, die eine Ebene beschreibt, und eine Gleichung einer Kugel um den Nullpunkt. Wann gehört ein Punkt zur Ebene, zur Kugel, zu beiden? Gib drei Punkte der Ebene an und drei Punkte der Kugel.
2. Bestimme die Schnittpunkte deiner Ebene mit den Koordinatenachsen und zeichne das Dreieck, das sich dabei ergeben sollte.

3. Eine Ebene kann man durch eine Gleichung beschreiben, sie als Menge der Form „Stützvektor plus Erzeugnis“ hinschreiben oder ihre Punkte parametrisieren, das heißt, den allgemeinen Punkt der Ebene als Funktion zweier Parameter r, s angeben. Alle drei Darstellungarten müssen dir geläufig sein. Gib jeweils die fehlenden beiden Darstellungen an zu

$$\varepsilon_1 : x + 4y - 2z = 3, \varepsilon_2 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ 4 \end{array} \right) + \left\langle \left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 0 \end{array} \right) \right\rangle, \varepsilon_3 : \vec{x}(r, s) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) + r \left(\begin{array}{c} 2 \\ -3 \\ 1 \end{array} \right) + s \left(\begin{array}{c} 3 \\ -4 \\ 0 \end{array} \right).$$

Welche der Ebenen enthält den Nullpunkt?

4. Bestimme alle Punkte, die von $A(2, -1, 3)$ und $B(5, 3, 2)$ gleich weit entfernt sind.
 5. Es sei $g = \vec{a} + \langle \vec{b} \rangle$ mit

$$\vec{a} = \left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 2 \end{array} \right), \vec{b} = \left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right) \quad \text{und} \quad \vec{c} = \left(\begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ 1 \end{array} \right).$$

Welchen Abstand hat g vom Nullpunkt, welchen von \vec{c} ? Gibt es eine Ebene, die g enthält und die \vec{c} als Normalenvektor hat? Kann man sinnvoll von einem Winkel sprechen, den g mit der xy -Ebene bildet?

6. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rechne nach, dass $A\vec{n} = \vec{n}$ ist, und überlege dir, welche geometrische Bedeutung die Matrixabbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ hat. Was macht die Abbildung mit dem Würfel W , mit dem du schon häufiger zu tun hattest?

7. Zähle alle Ebenen auf, die den Vektor \vec{n} der vorigen Aufgabe als Normalenvektor haben und einen Eckpunkt des Würfels W enthalten. Wie viele sind es? Welche Abstände haben sie vom Nullpunkt?

4.7 Matrixabbildungen des \mathbb{R}^3

Jede 3×3 -Matrix A definiert durch die Vorschrift $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ eine Abbildung, die jedem Raumpunkt einen Bildpunkt zuordnet. Es gilt alles, was du bisher über Matrixabbildungen gelernt hast; insbesondere sind die Spaltenvektoren von A die Bilder der Einheitsvektoren.

1. **Eine Drehung.** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Die zugehörige Matrixabbildung ist eine Drehung um 120° ; die Drehachse ist die von $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ erzeugte Gerade, sie ist uns schon als Raumdiagonale des Würfels W begegnet. Offensichtlich ist A^3 die Einheitsmatrix und $A^{-1} = A^2$.

2. **Drehung um die z -Achse.** Du kennst bereits die Matrix einer Drehung der Ebene um den Nullpunkt um einen Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn. Daraus gewinnst du leicht die Matrix der Drehung des Raumes um die z -Achse um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn:

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

3. **Drehungen um die x - und um die y -Achse.** Es ist keine schwierige Aufgabe, sich die Matrizen der Drehungen um die x -Achse und um die y -Achse um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn zu überlegen. Wir gewinnen sie nun, indem wir ein altes Prinzip anwenden. Es ist $AM(\varphi)A^2$ die Matrix der Drehung um die x -Achse und $A^2M(\varphi)A$ die Matrix der Drehung um die y -Achse, jeweils um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn. Mache dir das gut klar, wir brauchen das Prinzip gleich noch einmal.
4. **Drehung um eine beliebige Achse.** Wir wollen nun um eine beliebige Achse $\langle \vec{d} \rangle$ drehen; dabei ist durch die Richtung von \vec{d} festgelegt, was oben ist. Das brauchen wir, sonst können wir nicht von einer Drehung gegen den Uhrzeigersinn sprechen. Die Sache läuft nun so: wir drehen \vec{d} erst durch eine Drehung M_1 um die z -Achse in die yz -Ebene und anschließend durch eine Drehung M_2 um die x -Achse auf die (positive) z -Achse. Dann drehen wir um φ , und anschließend machen wir die Sache rückgängig. Die gesuchte Matrix ist dann $M_1^{-1}M_2^{-1}M(\varphi)M_2M_1$. Im Unterricht machen wir ein konkretes Beispiel.
5. Eine **Punktspiegelung am Ursprung** wird durch die Matrixabbildung zu

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bewirkt.

6. **Projektionen** beschreibe ich im nächsten Abschnitt.

4.8 Projektionen des \mathbb{R}^3 auf eine Ebene durch den Nullpunkt

Wie ich in der Überschrift schon sage, beschäftige ich mich nur mit ganz speziellen Projektionen, die aber anschaulich greifbar sind und die eine große praktische Bedeutung haben. Du kennst sie aus dem Alltag. Wenn die Sonne auf eine Wand scheint, erzeugen alle Gegenstände, die sich zwischen Sonne und Wand befinden, einen Schatten auf der Wand. Dies modellieren wir nun. Als Wand nehmen wir eine Ebene ε durch den Nullpunkt mit Normalenvektor \vec{n} :

$$\varepsilon : \vec{n} * \vec{x} = 0 \quad ,$$

sie muss keineswegs senkrecht stehen. Die Sonnenstrahlen stellen wir als parallele Geraden dar, sie können dann alle mit Hilfe des gleichen Richtungsvektors \vec{v} geschrieben werden. Der Bildpunkt eines Vektors \vec{x} ist dann der Schnittpunkt der Geraden $\vec{x} + \langle \vec{v} \rangle$ mit der Ebene ε . Er lässt sich sehr leicht bestimmen, man braucht ja nur den allgemeinen Vektor $\vec{x} + t\vec{v}$ der Geraden in die Ebenengleichung einzusetzen. Dann hat man ein 1×1 -System zu lösen und den gefundenen t -Wert einzusetzen, fertig. Das Ergebnis ist übrigens⁸

$$\vec{x} \mapsto \vec{x} - \frac{\vec{x} * \vec{n}}{\vec{v} * \vec{n}} \vec{v} \quad . \quad (17)$$

Vielleicht überzeugt die schnelle Lösung Alexander ja doch davon, dass man auch ohne konkrete Zahlen Mathematik machen kann; wer weiß. Ein konkretes Beispiel gibt es jedenfalls nicht, du hast ja welche aus dem Unterricht notiert.

Wenn du dir im konkreten Fall die Gleichung 17 anschaust, stellst du fest, dass man die Abbildung als Matrixabbildung schreiben kann. Das heißt, es gibt eine 3×3 -Matrix P so, dass der Bildpunkt von \vec{x} gerade $P\vec{x}$ ist. Diese Matrix P hat interessante Eigenschaften.

1. Für jedes $\vec{y} \in \varepsilon$ und nur für diese ist $P\vec{y} = \vec{y}$.
Das ist klar, die Punkte von ε und nur diese haben sich selbst als Schattenpunkt.

⁸vorausgesetzt natürlich, dass \vec{v} nicht in der Ebene liegt

2. Es ist $P^2 = P$. Denn für jedes \vec{x} ist $P^2\vec{x} = P(P\vec{x})$ Schattenbild des Schattenpunkts $P\vec{x}$, also ist $P^2\vec{x} = P\vec{x}$. Wenn du für \vec{x} den ersten Einheitsvektor \vec{e}_1 einsetzt, ist $P\vec{e}_1$ der erste Spaltenvektor von P und $P^2\vec{e}_1$ der erste Spaltenvektor von P^2 . Folglich stimmen P und P^2 in der ersten Spalte überein. Wenn du für \vec{x} nun der Reihe nach die übrigen Einheitsvektoren einsetzt, siehst du, dass die Matrizen gleich sind.
3. Es ist $P\vec{x} = \vec{0}$ genau dann, wenn \vec{x} ein Vielfaches von \vec{v} ist, und $P\vec{x} = P\vec{y}$ gilt dann und nur dann, wenn sich \vec{x} und \vec{y} um ein Vielfaches von \vec{v} unterscheiden.
Das kannst du dir anhand der Sonnenstrahlen klarmachen oder nachrechnen.

Wenn du eine quadratische Matrix P hast mit der Eigenschaft $P^2 = P$, verhält sich die zugehörige Matrixabbildung wie eine Projektion. Die Richtung der „Sonnenstrahlen“ bekommst du, indem du die Gleichung $P\vec{x} = \vec{0}$ löst. Die „Projektionswand“ bekommst du als Lösungsmenge der Gleichung $P\vec{x} = \vec{x}$, da bestimmst du also die Fixvektoren von P (nach Niko). Du kannst auch einfach das Erzeugnis der Spaltenvektoren von P nehmen, da werden aber überflüssige dabei sein.

Du solltest nun fit genug sein, diese allgemeinen Hinweise im konkreten Fall umzusetzen; ein Beispiel gibt es hier nicht. Und damit sind wir so ziemlich am Ende unserer ausschließlichen Beschäftigung mit der linearen Algebra angelangt, so langsam kommt auch wieder Analysis ins Spiel.

5 Koordinaten

5.1 Einführende Bemerkungen

Da hat der gute Benjamin mich angeregt, einen Gegenstand vertiefend zu behandeln, der in der Mathematik und in zahlreichen Anwendungen von herausragender Bedeutung ist, nämlich den Koordinatenbegriff. Du denkst vielleicht an dein altes xy -System, in das du Kurven gezeichnet hast, aber der Begriff reicht viel, viel weiter, als du ahnen kannst.

Dass man mehr als zwei Achsen nehmen kann, ist es auch noch nicht. Am ehesten bekommst du eine Vorstellung davon, was ich meine, wenn du dir eine Karte in einem Atlas vorstellst. Man hat ein Bild einer Landschaft, und gewisse Eigenschaften der Landschaft sind in dem Bild aufgehoben. Die Karten, die du kennst, handeln von zweidimensionalen Landschaften, aber es gibt auch eindimensionale Landschaften und solche beliebig hoher Dimension.

Gehen wir Schritt für Schritt vor und beginnen wir mit einer eindimensionalen Landschaft, zum Beispiel einer Strecke im Raum, die zwei Punkte A und B verbindet. Die Punkte der Strecke lassen sich in der Form

$$\vec{x}(t) = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 1$$

hinschreiben. Schau: die Karte ist der Abschnitt⁹ $[0; 1]$ der t -Achse, und jeder Punkt ist durch seinen t -Wert charakterisiert. Klar, das ist eine öde Landschaft; überhaupt ist die lineare Geometrie, in der alles gerade ist, arm an Reizen. Nehmen wir anregendere eindimensionale Landschaften, zum Beispiel diese:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad -1 \leq t \leq 2$$

oder diese:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \frac{1}{2}t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi$$

Schauen wir uns noch zweidimensionale Landschaften an. Bernhard Riemann stellte als Charakteristikum einer n -dimensionalen Landschaft heraus, dass eine gescheite Karte der Landschaft

⁹Der Fachbegriff für einen solchen Abschnitt der Zahlengeraden heißt **Intervall**, aber das nur am Rande.

n Parameter braucht. Eben reicht einer, nämlich das t , jetzt brauchen wir zwei. Erstes Beispiel:

$$\vec{x}(r, s) = \vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c}, \quad 0 \leq r, s \leq 1$$

Die Karte ist das Einheitsquadrat der rs -Ebene, die Landschaft ein Parallelogramm im Raum, wenn $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ sind und \vec{b} und \vec{c} von $\vec{0}$ verschieden und nicht Vielfache von einander sind. Zu linearer Geometrie habe ich ja oben schon etwas gesagt, also bekommst du hier noch ein paar interessantere Beispiel. Erst etwas Vertrautes:

$$\vec{x}(r, s) = \begin{pmatrix} r \\ s \\ 5 - r^2 - s^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq r, s \leq 1,$$

da liegt die Karte in natürlicher Weise gleich unter der Landschaft. Oder

$$\vec{x}(r, s) = \begin{pmatrix} \cos(r) \\ \sin(r) \\ s \end{pmatrix}, \quad 0 \leq r < 2\pi, 0 \leq s \leq 1,$$

oder, Niko zuliebe

$$\vec{x}(r, s) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-r^2} \cos(t) \\ \sqrt{1-r^2} \sin(t) \\ r \end{pmatrix}, \quad -1 < r < 1, 0 \leq t < 2\pi.$$

Mit Maple lassen sich solche zweidimensionalen Landschaften wunderbar zeichnen, sonst wagte ich auch nicht, dich damit zu befassen. So aber kannst du dich auf sehr reizvolle Unterrichtsinhalte freuen.

6 Kurven in der Ebene und im Raum

6.1 Einführung und Beispiele

Stelle dir vor, ein Punkt bewege sich in der Ebene oder im Raum. Zum Zeitpunkt t befinde er sich im Punkt $P(t)$, wenn wir geometrische Sprache benutzen, oder, in der Sprache der Linearen Algebra, an dem durch $\vec{p}(t)$ gegebenen Ort. Wir werden beide Schreibweisen verwenden. Zunächst sollst du einige Beispiele ebener Kurven sehen, zum Teil sind sie dir vertraut.

$P(t) = (1 + 2t, -1 - t), 2 \leq t \leq 6$	Strecke in der Ebene
$P(t) = (t^2, t), -2 \leq t \leq 3$	Teil der Wurzelparabel
$P(t) = (\cos(t), \sin(t)), 0 \leq t \leq 2\pi$	Einheitskreis
$P(t) = (3 \cos(t), \sin(t)), 0 \leq t \leq 2\pi$	Ellipse
$P(t) = (t, f(t)), a \leq t \leq b$	Stück des Graphen der Funktion f
$P(t) = (t \cos(t), t \sin(t)), 0 \leq t \leq 6\pi$	Archimedische Spirale
$P(t) = (t^2, t^3), -\infty < t < \infty$	Neilsche Parabel

Du kannst dir Kurven von Maple zeichnen lassen. Ein Bild der durch

$$P(t) = (x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b \tag{18}$$

gegebenen Kurve erhältst du durch folgende Eingabe:

```
plot( [x(t), y(t), t = a..b], scaling=constrained);
```

Durch den Zusatz „scaling=constrained“ erzwingst du dabei, dass Maple auf beiden Achsen den gleichen Maßstab verwendet. Wenn du den Zusatz weglässt, ist das Bild in der Regel verzerrt; das ist für unsere Zwecke nicht günstig. Und achte darauf, dass der Laufbereich $t = a..b$ mit in die eckige Klammer muss.

6.2 Ortsveränderung, Bahngeschwindigkeit, Tangentialvektor

Schauen wir nun dem Punkt zu, wie er sich längs seiner Kurve bewegt. Zum Zeitpunkt t befindet er sich im Punkt $P(t)$, nach einer Zeitspanne Δt im Punkt $P(t + \Delta t)$. Dabei hat er auf seiner Bahn ein Wegstück der Länge Δs zurückgelegt¹⁰. Seine **mittlere Bahngeschwindigkeit** im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ beträgt

$$\bar{v} := \frac{\Delta s}{\Delta t} ,$$

und für $\Delta t \rightarrow 0$ strebt dieser Ausdruck gegen die **momentane Bahngeschwindigkeit** $v(t)$ zur Zeit t :

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} v(t)$$

Die **Ortsveränderung**, die der Punkt in der Zeitspanne Δt erfährt, ist durch den Vektor

$$\vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)$$

gegeben. Seine Länge ist offensichtlich¹¹ höchstens so groß wie Δs :

$$|\vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)| \leq \Delta s$$

Wenn sich der Punkt auf geradem Wege und mit konstanter Bahngeschwindigkeit von $P(t)$ nach $P(t + \Delta t)$ bewegen soll, ist die dafür erforderliche Geschwindigkeit durch

$$\frac{1}{\Delta t} (\vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t))$$

gegeben: dieser Ausdruck ist also so etwas wie die **vektorielle Durchschnittsgeschwindigkeit** im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$; für $\Delta t \rightarrow 0$ strebt er gegen die **vektorielle Momentangeschwindigkeit** zur Zeit t . Wir rechnen aus, was für eine ebene Kurve herauskommt. Dazu schreiben wir $P(t) = (x(t), y(t))$.

$$\frac{1}{\Delta t} (\vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)) = \frac{1}{\Delta t} \left[\begin{pmatrix} x(t + \Delta t) \\ y(t + \Delta t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

Die Berechnung dieses Vektors ist also erfreulich einfach, du musst nur die Koordinatenfunktionen $x(t)$ und $y(t)$ ableiten. Der Vektor ist **Tangentialvektor** an die Kurve im Punkt $P(t)$, wir wollen ihn mit $\vec{p}'(t)$ bezeichnen.

$$\frac{1}{\Delta t} (\vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} =: \vec{p}'(t) \quad (19)$$

Die Länge dieses Tangentialvektors ist übrigens die momentane Bahngeschwindigkeit $v(t)$. Das siehst du so ein: Für kleine Δt ist das durchlaufene Kurvenstück praktisch gerade – andere $P(t)$ behandeln wir nicht. Und dann ist für positives Δt

$$\begin{aligned} \frac{\Delta s}{\Delta t} &\approx \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta t} = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta t)^2}} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = |\vec{p}'(t)| . \end{aligned}$$

¹⁰Das Δs ist leichter hingeschrieben als berechnet, damit beschäftigen wir uns noch.

¹¹Anschaulich ist das klar, der gerade Weg ist der kürzeste Weg. Wenn du das in Frage stellst, wird es schwierig.

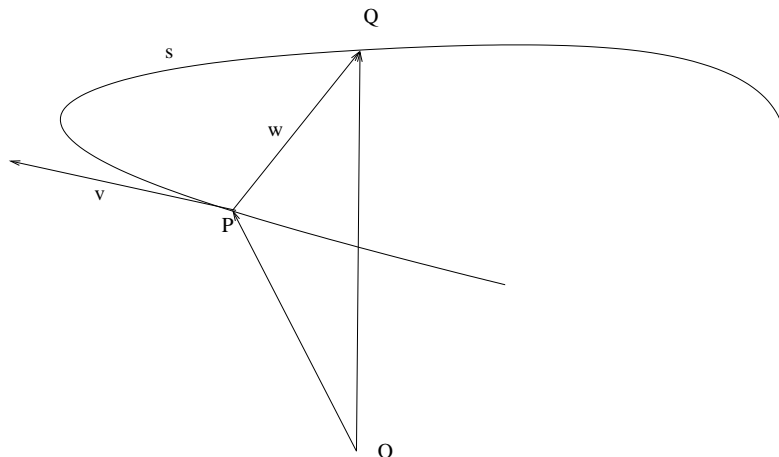


Abbildung 2: Diese Skizze mag dir die gerade eingeführten Begriffe näherbringen. Es ist $P = P(t)$, $Q = P(t + \Delta t)$. Der Nullpunkt ist mit O bezeichnet, die Ortsvektoren $\vec{p}(t)$ und $\vec{p}(t + \Delta t)$ sind durch Pfeile dargestellt. Der Pfeil von P nach Q steht für den Differenzvektor $\vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)$, er ist mit w bezeichnet. Der Differenzvektor muss noch mit dem Faktor $1/\Delta t$ versehen werden, das verändert aber nur seine Länge, dann haben wir die mittlere vektorielle Geschwindigkeit vor uns. Wenn Δt gegen 0 läuft, strebt der Vektor der mittleren vektoriellen Geschwindigkeit gegen den Tangentialvektor, im Bild mit v bezeichnet. Die Bogenlänge Δs , im Bild nur mit s bezeichnet, ist natürlich mindestens so lang wie der Pfeil w .

6.3 Parameterdarstellung und Bahnkurve

Hier siehst du vier Parameterdarstellungen, der Laufbereich von t sei jeweils $-\infty < t < \infty$.

$$\vec{p}_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2(t) = \begin{pmatrix} (t-2)^2 \\ t-2 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} t^4 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_4(t) = \begin{pmatrix} t^6 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist jeweils die x -Koordinate das Quadrat der y -Koordinate, also bewegen sich alle vier Punkte auf der Parabel mit der Gleichung $x - y^2 = 0$. Die Punkte $\vec{p}_1(t)$, $\vec{p}_2(t)$ und $\vec{p}_4(t)$ durchlaufen die ganze Parabel von unten nach oben, aber mit verschiedenen Bahngeschwindigkeiten $v_i(t)$. Bei $p_1(t)$ und $p_2(t)$ sind sogar nur die Uhren etwas gegeneinander verstellt.

Der Punkt $\vec{p}_3(t)$ jedoch kommt nicht unter die x -Achse. Er kommt von oben, ist zur Zeit t im Nullpunkt mit der Geschwindigkeit $v_3(0) = 0$, wechselt die Richtung und läuft wieder zurück. Die Bahnkurve von $p_3(t)$ hat also eine Spitze.

Diese Beispiele sollen die folgenden Sachverhalte demonstrieren:

1. Verschiedene Parameterdarstellungen können durchaus die gleiche Bahnkurve beschreiben. Man muss die konkrete Parameterdarstellung, in die ja auch der Bewegungsablauf selbst eingeht, von der Bahnkurve unterscheiden, also von der Menge der Punkte, die durchlaufen werden.
2. Die Bahnkurve kann durchaus eine Spitze haben, obwohl die Berechnung des Tangentialvektors problemlos war. Dies kann geschehen, wenn der Tangentialvektor $= \vec{0}$ ist, also die Bahngeschwindigkeit $v(t)$ den Wert 0 annimmt. Wenn der Punkt anhält, kann er sich anschließend in einer neuen Richtung weiterbewegen: man verliert die Kontrolle. Die Bahnkurve kann dann eine Spitze haben, aber es muss nicht so sein: Es ist

$$\vec{p}_3'(t) = \begin{pmatrix} 4t^3 \\ 2t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{p}_4'(t) = \begin{pmatrix} 6t^5 \\ 3t^2 \end{pmatrix},$$

also $\vec{p}_3'(0) = \vec{p}_4'(0) = \vec{0}$. Die Bahnkurve von \vec{p}_3 hat eine Spitze, die Bahnkurve von \vec{p}_4 aber nicht. In der Regel verlangt man, dass die Bahngeschwindigkeit des betrachteten Punktes nicht 0 wird, um sich den sonst möglichen Ärger vom Halse zu halten.

6.4 Die Länge eines Kurvenstücks

Es sei durch die Parameterdarstellung $\vec{p}(t)$, $a \leq t \leq b$ mit $\vec{p}'(t) \neq \vec{0}$ ein Kurvenstück gegeben. Wir fragen, wie lang dieses Kurvenstück ist. Man geht pragmatisch so vor: Das Zeitintervall $[a; b]$ wird durch Teilpunkte

$$a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < b$$

in Teilstücke unterteilt. Dann berechnet man die Länge des Streckenzuges

$$P(a)P(t_1)P(t_2) \dots P(t_{n-1})P(b) \quad .$$

Das Kurvenstück ist mindestens so lang wie der Streckenzug. Fügt man Teilpunkte hinzu, wird der Streckenzug in der Regel länger, jedoch wegen der Dreiecksungleichung keinesfalls kürzer. Lässt man nun die Anzahl der Teilpunkte so gegen ∞ laufen, dass die Länge des längsten Teilstücks von $[a; b]$ gegen 0 läuft, und strebt die Länge des Streckenzuges dabei gegen einen festen Wert, sehen wir diesen Wert als die Länge des Kurvenstücks an. Anschaulich wird dir das Vorgehen einleuchten, die saubere Begriffsbildung überlassen wir den Fachleuten.

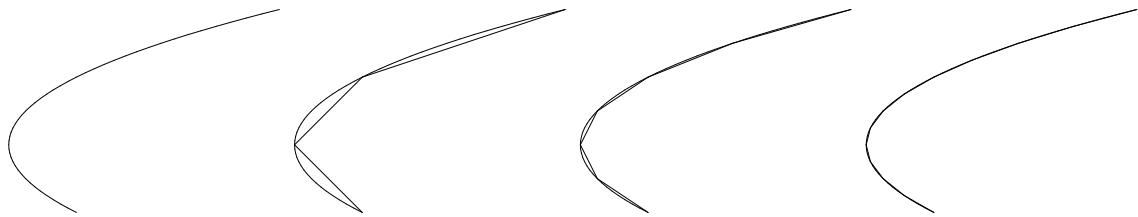


Abbildung 3: Kurvenstück zu $P(t) = (t^2, t)$, $-1 \leq t \leq 2$, mit einbeschriebenen Streckenzügen. Von links nach rechts sieht man das Kurvenstück und dann das Kurvenstück mit zwei, fünf und schließlich elf eingefügten Teilpunkten. Der Streckenzug aus drei Teilstrecken hat die Gesamtlänge 5.990704784, der aus sechs Teilstrecken die Gesamtlänge 6.087128300, der aus zwölf Teilstrecken die Gesamtlänge 6.116011134. Die Länge des Kurvenstücks beträgt 6.125726619.

Rechnerisch sieht die Sache so aus: Mit $t_0 := a$ und $t_n := b$ ist die Länge des Streckenzuges gegeben durch die Summe

$$\sum_{i=1}^n |\vec{p}(t_i) - \vec{p}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x)_i^2 + (\Delta y)_i^2} \quad .$$

Nun ist, wenn wir $(\Delta t)_i := t_i - t_{i-1}$ setzen,

$$(\Delta x)_i = x'(z_i)(\Delta t)_i \quad \text{für ein geeignetes } z_i \text{ mit } t_{i-1} < z_i < t_i.$$

Aus der Summe wird damit

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(z_i))^2 + (y'(z_i))^2} (\Delta t)_i \quad ,$$

und dies strebt gegen das Integral

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_a^b |\vec{p}'(t)| dt = \int_a^b v(t) dt \quad ,$$

wenn wir die Anzahl der Teilpunkte in der beschriebenen Art und Weise gegen ∞ laufen lassen.¹² Dieses Integral können wir allerdings nur in seltenen Fällen auswerten; in der Regel müssen wir uns damit begnügen, es näherungsweise zu berechnen.

Wir halten unser Ergebnis fest:

16 Satz

Die Länge des Kurvenstücks, das der Punkt $\vec{p}(t)$ in der Zeitspanne $[a; b]$ durchläuft, ist gegeben durch

$$s = \int_a^b |\vec{p}'(t)| dt = \int_a^b v(t) dt .$$

6.5 Übungsaufgaben

1. Du kennst die logarithmische Spirale mit der Parameterdarstellung

$$\vec{p}: t \mapsto e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} .$$

Berechne den Quotienten der Längen von $\vec{p}(t)$ und $\vec{p}(t + 2\pi)$.

2. Was ist das Bild der logarithmischen Spirale unter der zentrischen Streckung mit Streckzentrum $(0; 0)$ und Streckfaktor $e^{2\pi}$? – Seltsam, nicht?
3. Begründe, dass die Drehung der Ebene um den Nullpunkt um den Winkel φ den Punkt $P(\cos(t); \sin(t))$ des Einheitskreises in den Punkt $P'(\cos(t + \varphi); \sin(t + \varphi))$ abbildet, und überlege dir, ob man dieses Ergebnis auch mit Hilfe einer Drehmatrix bekommt.
4. Begründe, dass das Bild der logarithmischen Spirale unter der Drehung um den Nullpunkt um den Winkel φ durch

$$\vec{q}: t \mapsto e^t \begin{pmatrix} \cos(t + \varphi) \\ \sin(t + \varphi) \end{pmatrix}$$

gegeben ist, und bilde den Quotienten der Längen von $\vec{q}(t - \varphi)$ und $\vec{p}(t)$. Erstaunlich, nicht? Die logarithmische Spirale ist eine wahre Wunderkurve.

5. Was bedeutet

$$\int_0^{2\pi} y(t)x'(t) dt ,$$

wenn $x(t)$ und $y(t)$ die Koordinatenfunktionen der logarithmischen Spirale sind, und warum ist der Wert dieses Integrals negativ?

6. Der Punkt $P(t)$, der die logarithmische Spirale erzeugt, ist zur Zeit $t = 0$ im Punkt $(1; 0)$, und er bewegt sich dann zunächst nach rechts. Wann kehrt er wieder um?
7. Wie sieht die durch $P(t) = (\cos(t); \sin(2t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$ gegebene Kurve aus?

7 Änderungen, Änderungsraten und Gradient

Du kennst von früher her die Ableitung f' einer Funktion f : Hängt eine Größe y von einer Größe x so ab, dass $y = f(x)$ ist, bewirkt eine Änderung des x -Wertes um ein Δx eine Änderung des y -Wertes um $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Die (mittlere) Änderungsrate $\Delta y / \Delta x$ strebt für $\Delta x \rightarrow 0$ gegen die Ableitung oder lokale Änderungsrate $f'(x)$, und für kleine Δx ist Δy ungefähr $f'(x)\Delta x$:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) , \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f'(x) , \quad \Delta y \approx f'(x)\Delta x \quad \text{für kleine } \Delta x \quad (20)$$

¹²Im Nachhinein ist es so überraschend nicht, dass der in der Zeitspanne von a bis b vom Punkt zurückgelegte Weg das Zeitintegral über die Bahngeschwindigkeit ist.

Dies und die geometrische Bedeutung dieser Begriffe am Graphen von f – Sekantensteigung und Tangentensteigung – müssen dir völlig klar sein, sonst solltest du nicht weiterlesen.

Wir beschäftigen uns nun mit Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, also mit Funktionen in zwei Veränderlichen, deren Werte Zahlen sind. Ein Beispiel wäre etwa durch $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$ gegeben. Wenn es bequem ist, schreiben wir auch $f(\vec{x})$ für $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

Der Graph einer solchen Funktion f ist die durch die Gleichung $z = f(x, y)$ beschriebene Fläche im Raum. Die Rolle, die der x -Wert hatte, übernimmt der Punkt $P(x, y)$ der xy -Ebene. In z -Richtung wird die Höhe $z = f(x, y)$ abgetragen, der Punkt des Graphen ist dann $(x, y, f(x, y))$.

Unsere Aufgabe ist nun, Auskunft über die Änderung Δz des Funktionswertes von f zu geben, die sich ergibt, wenn wir von (x, y) zu $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ übergehen, und die Begriffe der Änderungsrate und der Tangente auf die neue Situation zu übertragen. Zunächst halten wir y fest und verändern nur den x -Wert um ein Δx . Dann haben wir es im Grunde mit einer gewöhnlichen Funktion einer Veränderlichen zu tun, ihr Graph ist die Schnittkurve der Fläche $z = f(x, y)$ mit der Ebene parallel zur xz -Ebene durch (x, y) . Ihre Ableitung berechnen wir in der üblichen Weise, dabei sehen wir y als Konstante an. Diese Ableitung bezeichnet man als **partielle Ableitung von f nach x** , und man benutzt dafür das Symbol $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$.

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \quad (21)$$

Analog erhalten wir, wenn wir x festhalten und y um Δy verändern, die partielle Ableitung von f nach y .

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \xrightarrow{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \quad (22)$$

Komplizierter wird die Sache, wenn wir uns von (x, y) in einer beliebigen Richtung wegbewegen. Die Richtung geben wir durch einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ an, also durch einen Vektor der Gestalt

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} ,$$

und wir entfernen uns von (x, y) um $h\vec{v}$ für eine Zahl h , die wir später gegen Null laufen lassen wollen.¹³ Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{\Delta z}{h} &= \frac{f(x + hv_1, y + hv_2) - f(x, y)}{h} \\ &= \frac{f(x + hv_1, y + hv_2) - f(x, y + hv_2) + f(x, y + hv_2) - f(x, y)}{h} \\ &= \frac{f(x + hv_1, y + hv_2) - f(x, y + hv_2)}{h} + \frac{f(x, y + hv_2) - f(x, y)}{h} \\ &= v_1 \frac{f(x + hv_1, y + hv_2) - f(x, y + hv_2)}{hv_1} + v_2 \frac{f(x, y + hv_2) - f(x, y)}{hv_2} . \end{aligned}$$

Sehen wir uns die beiden Brüche an. Der zweite strebt für $h \rightarrow 0$ gegen $v_2 \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$, der ist kein Problem. Der erste ist nach dem Mittelwertsatz gleich $v_1 \frac{\partial}{\partial x} f(x^*, y + hv_2)$ für ein x^* zwischen x und $x + hv_1$. Für $h \rightarrow 0$ strebt der gegen $v_1 \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$. Insgesamt erhalten wir die **Richtungsableitung** von f in der durch den Vektor \vec{v} der Länge 1 gegebenen Richtung als

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{f(x + hv_1, y + hv_2) - f(x, y)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} v_1 \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + v_2 \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) =: \frac{\partial}{\partial \vec{v}} f(x, y) . \quad (23)$$

¹³Im Grunde haben wir es auch in diesem Fall wieder mit einer gewöhnlichen Funktion $h \mapsto f(x + hv_1, y + hv_2)$ zu tun. Ihr Graph ist die Schnittkurve des Graphen von f mit der Ebene durch den Punkt (x, y) der xy -Ebene mit den Richtungsvektoren $v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2$ und \vec{e}_3 .

Für $\vec{v} = \vec{e}_1$ kommt wieder die partielle Ableitung von f nach x heraus, für $\vec{v} = \vec{e}_2$ die partielle Ableitung von f nach y .

Mit Hilfe der Richtungsableitung gewinnen wir Tangenten an die Fläche im Punkt (x, y, z) . Richtungsvektoren der Tangenten in x -Richtung bzw. in y -Richtung sind

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \end{pmatrix} .$$

Für die durch \vec{v} gegebene Richtung erhalten wir

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \frac{\partial}{\partial \vec{v}} f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_1 \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + v_2 \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \end{pmatrix} \right\rangle . \quad (25)$$

Also liegen alle Tangenten an die Fläche in $(x, y, f(x, y))$ in einer Ebene! Diese Ebene heißt die **Tangentialebene** an die Fläche in diesem Punkt. Wenn wir einmal x_0, y_0, z_0 für $x, y, f(x, y)$ schreiben, können wir eine Parameterdarstellung der Tangentialebene notieren:

$$\vec{x}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + (x - x_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) \end{pmatrix} + (y - y_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad (26)$$

Wir können auch sofort einen Normalenvektor der Tangentialebene ablesen:

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \\ -\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schließlich gewinnen wir aus Gleichung 23 für die Änderung Δz die Näherung

$$\Delta z \approx h \left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}} f(x, y) \right) = h \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + v_2 \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) . \quad (27)$$

Werfen wir noch einen Blick auf dieses Ergebnis! Da steht ein Skalarprodukt unseres Vektors \vec{v} mit einem Vektor, dessen Komponenten die beiden partiellen Ableitungen von f sind. Dieser Vektor wird der **Gradient** von f genannt, Symbol $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y)$.

$$v_1 \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + v_2 \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \vec{v} * \overrightarrow{\text{grad}} f(x, y) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \end{pmatrix} \quad (28)$$

Der Gradient gibt uns wichtige Informationen über die Funktion f . Wie du weißt, ist das Skalarprodukt zweier Vektoren gleich dem Produkt ihrer Längen und des Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels. Der Kosinus liegt zwischen -1 und 1 . Der Wert 1 wird angenommen, wenn \vec{v} in Richtung des Gradienten zeigt, der Wert -1 , wenn \vec{v} und der Gradient in entgegengesetzte Richtungen zeigen. Das heißt aber, **dass der Gradient stets die Richtung des stärksten Anstiegs der Fläche** angibt. Wenn \vec{v} und der Gradient orthogonal sind, ist das Skalarprodukt 0 und somit $\Delta z \approx 0$. Die Höhenlinie durch (x, y) verläuft also orthogonal zum Gradienten $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y)$. Stelle dir eine Wanderkarte vor und mache dir das gut klar.

8 Klausur 13.2

1. Ebene Kurven

Es sei

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{\pi} t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- Skizziere die Kurve. Lasse dabei nach rechts etwas Platz!
- Berechne den Inhalt der Fläche, die der Fahrstrahl von P in der Zeit von 0 bis 2π überstreicht.
- Gib einen Rechenausdruck für die Länge der Kurve an.
- Mit $x(t)$ und $y(t)$ bezeichnen wir die Koordinaten von $\vec{p}(t)$. Was bedeutet dann

$$\int_0^\pi x(t)y'(t) dt \quad ?$$

- Schreibe die Matrix der Drehung der Ebene um den Nullpunkt um 180° hin und bestimme damit eine Vorschrift für die Drehung der Ebene um den Punkt $Q(3,0)$ um 180° . Skizziere auch das Bild der Kurve unter dieser Drehung, dabei solltest du das Bild zu (a) verwenden.

2. Matrixabbildungen

- Der Raum \mathbb{R}^3 wird in Richtung von

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

auf die xy -Ebene projiziert. Bestimme die Abbildungsmatrix.

- Bei der durch

$$\varphi : \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$$

gegebenen Abbildung handelt es sich um eine Drehung des Raums. Bestimme die Drehachse.

3. Funktionen zweier Veränderlicher

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit der Funktion

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x(9 - x^2 - y^2),$$

hier ist ein Teil der Fläche $z = f(x, y)$ dargestellt.

- Schreibe den Maple-Befehl hin, der das Bild erzeugt.
- Wenn du dir den Term $f(x, y)$ genau anschaust, erkennst du die Kurven, in denen die Fläche die xy -Ebene schneidet. Schreibe ihre Gleichungen hin und skizziere die Kurven in einer Darstellung der xy -Ebene. Kennzeichne in deiner Skizze, in welchen Teilen der xy -Ebene $f(x, y)$ positiv ist und wo $f(x, y)$ negativ ist. Vorsicht: Wenn du bei dieser Teilaufgabe viel rechnest, bist du auf dem Holzweg.
- Finde Symmetrien des Graphen und weise sie anhand des Terms nach.
- Bestimme die genaue Lage des Hochpunktes des Graphen, den das Bild zeigt.

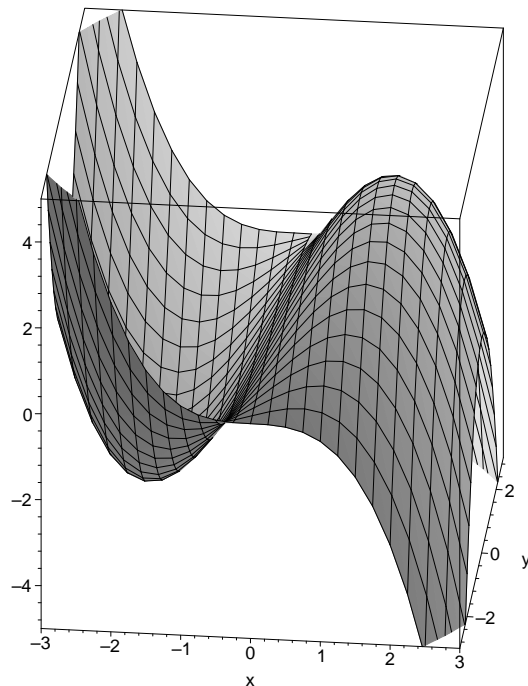


Abbildung 4: $z = f(x, y) = \frac{1}{3}x(9 - x^2 - y^2)$ für $-3 \leq x, y \leq 3$

- (e) Gib für die Tangentialebene an den Graphen im Punkt $P(1, 2, *)$ eine Parameterdarstellung, eine Gleichung und einen Funktionsterm $T(x, y)$ an.
- (f) In welcher Richtung steigt die Fläche im Punkt $P(1, 2, *)$ am stärksten an?
- (g) In welcher Richtung verläuft die Höhenlinie durch P ?
- (h) Finde eine rechnerische Beschreibung für die Menge aller Punkt der Fläche, die den gleichen z -Wert wie $P(1, 2, *)$ haben, und skizziere sie ganz flüchtig in der xy -Ebene. Gehe umsichtig vor und rechne nicht zu viel.
- (i) Schreibe einen Term für das Volumen des Hügels im rechten Teil der Abbildung hin, der sich dort aus der xy -Ebene erhebt.

9 Diskrete Fouriertransformation

Hier sollst du zum Abschluss einen kleinen Einblick in ein Gebiet bekommen, das in praktischen Anwendungen von ungeheurer Bedeutung ist. Ich muss natürlich dramatische Vereinfachungen vornehmen, aber ich hoffe, dass du immer noch eine Ahnung davon bekommst, was die Theorie leistet.

9.1 Problemstellung

Wir stellen uns die Aufgabe, eine gegebene Funktion f auf dem Intervall $[0; \pi]$ näherungsweise durch eine Linearkombination gewisser trigonometrischer Funktionen darzustellen. Dabei streben wir nicht die volle Allgemeinheit an, die professionelle Anwender der Theorie benötigen, sondern nehmen die trigonometrischen Funktionen aus dem Vorrat der $x \mapsto \sin(kx)$ für natürliche Zahlen k . Das heißt, wir wollen unsere Funktion f möglichst gut durch eine Funktion F der Form

$$F : x \mapsto \sum_{k=1}^{n-1} a_k \sin(kx) \quad (29)$$

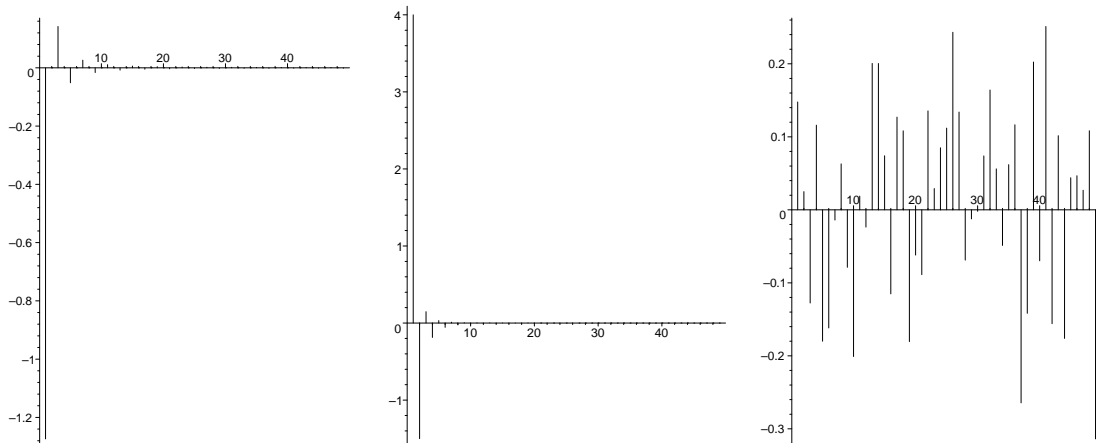


Abbildung 5: Die Koeffizienten a_k für $n = 50$ für $f(x) = |x - \frac{1}{2}\pi| - \frac{1}{2}\pi$ (links), für $f(x) = x^2(\pi - x)$ (Mitte) und für einen stochastisch erzeugten Vektor \vec{b} (rechts)

darstellen. Und wir hoffen, eine gute Annäherung dadurch zu erreichen, dass wir verlangen, dass $F(x)$ mit $f(x)$ auf den $n - 1$ Stützstellen $\frac{\pi}{n}, 2\frac{\pi}{n}, 3\frac{\pi}{n}, \dots, (n - 1)\frac{\pi}{n}$ übereinstimmt:

$$F(x) = f(x) \quad \text{für} \quad x = \frac{\pi}{n}, 2\frac{\pi}{n}, 3\frac{\pi}{n}, \dots, (n - 1)\frac{\pi}{n} \quad (30)$$

Dies bedeutet technisch, dass wir das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \sin(\frac{\pi}{n}) & \sin(2\frac{\pi}{n}) & \dots & \sin((n-1)\frac{\pi}{n}) \\ \sin(2\frac{\pi}{n}) & \sin(2 \cdot 2\frac{\pi}{n}) & \dots & \sin((n-1) \cdot 2\frac{\pi}{n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin((n-1)\frac{\pi}{n}) & \sin(2 \cdot (n-1)\frac{\pi}{n}) & \dots & \sin((n-1)(n-1)\frac{\pi}{n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\frac{\pi}{n}) \\ f(2\frac{\pi}{n}) \\ \vdots \\ f((n-1)\frac{\pi}{n}) \end{pmatrix}$$

lösen müssen. Wir schreiben dieses Gleichungssystem kurz in der Form

$$M\vec{a} = \vec{b} \quad \text{mit} \quad M = (m_{ij}) = \left(\sin\left(j\left(i\frac{\pi}{n}\right)\right) \right) \quad \text{und} \quad b_i = f\left(i\frac{\pi}{n}\right). \quad (31)$$

Die Lösung des Systems ist gegeben durch $M^{-1}\vec{b}$, fertig.¹⁴

9.2 Beispiele

Offensichtlich ergibt sich der Vektor \vec{a} der Koeffizienten der Reihe in Gleichung 29 durch eine Matrixabbildung aus dem Vektor \vec{b} der Werte von f , und die Abbildungsmatrix M^{-1} hängt nicht von f , sondern nur von n ab. Haben wir M^{-1} für ein n einmal berechnet, können wir damit die Koeffizienten a_k der $\sin(kx)$ für beliebige Funktionen bilden.¹⁵

Wir schauen uns nun die a_k für einige Beispiele an – siehe Abbildung 5.

Die Abbildung zeigt, dass für „gute“ Funktionen f nur die allerersten a_k wesentlich von 0 verschieden sind, während bei der stochastisch erzeugten Werteliste überall im Bereich von $k = 1$ bis $k = 49$ wesentlich von 0 verschiedene a_k auftreten. Diese Tatsache eröffnet verblüffende Möglichkeiten. Sagen wir, die Funktion f aus dem linken Bild stehe für ein Signal, das übermittelt wird, sei es Schall oder eine elektromagnetische Welle. Dieses Signal werde durch ein so genanntes Rauschen gestört, wie es im rechten Bild dargestellt ist. Empfangen wird dann nur die Summe des Vektors \vec{b} der Werte $f(k\frac{\pi}{n})$ und des Vektors der stochastisch gebildeten Werte. Zu diesem

¹⁴In 13zwei.mws findest du Beispiele.

¹⁵In der Praxis benutzt man zahlreiche Tricks, um den Rechenaufwand in Grenzen zu halten, aber wir lassen ruhig den Rechner schufteln; es geht uns nur um das Prinzip.

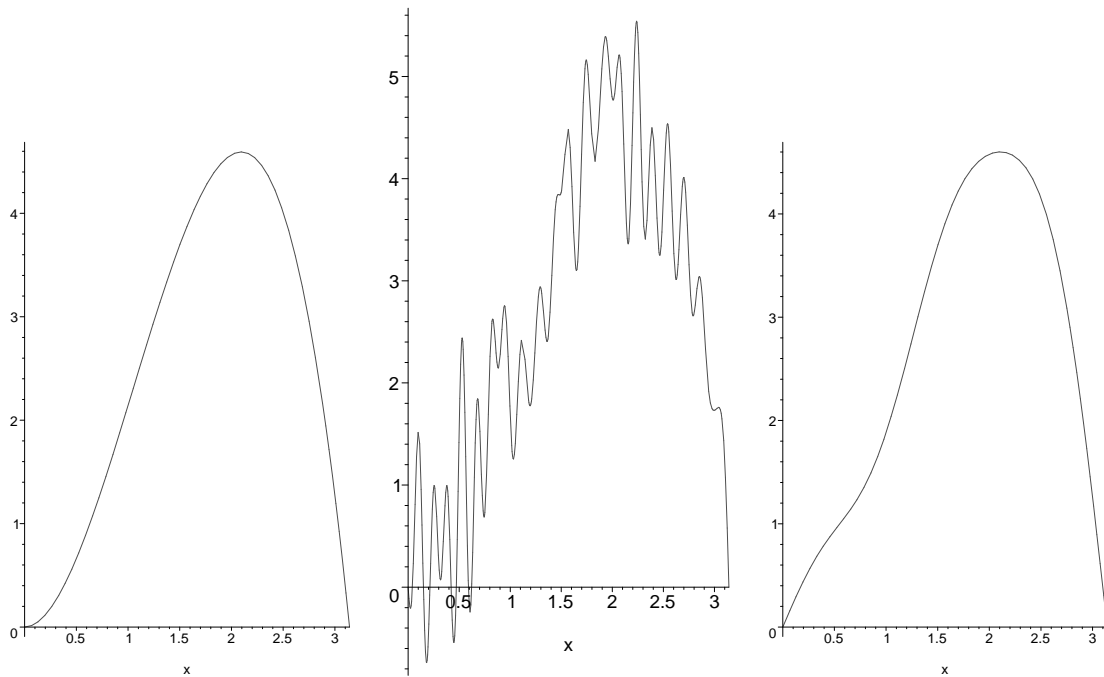


Abbildung 6: Signal $f(x) = x^2(\pi - x)$ (links), Fourierreihe zu $n = 50$ des verrauschten Signals (Mitte) und das entstörte Signal, das nur durch die ersten fünf Summanden der Fourierreihe gegeben ist (rechts)

Summenvektor berechnet man den Vektor \vec{a} der Koeffizienten der $\sin(kx)$ der Reihe in Gleichung 29. Das Ergebnis ist die Summe der Vektoren \vec{a} der a_k aus dem linken und aus dem rechten Bild in Abbildung 5, denn wir wenden ja eine Matrixabbildung an. Man bildet nun die Reihe

$$\sum a_k \sin(kx)$$

und verwendet dabei nur die ersten a_k . Dann bleibt der Löwenanteil des Signals f erhalten, die Störung, also das Rauschen, wird jedoch dramatisch reduziert. So hat man das Signal praktisch entstört. Ein Beispiel kannst du dir in Abbildung 6 ansehen.

Ich war sehr verblüfft, als ich das zum ersten mal sah, und ich dachte mir, es sei gut, ihr erlebtet das auch einmal. Ihr solltet eine echte Mathematikanwendung sehen, und nicht den Killefit, der heutzutage als „Anwendungsbeispiel“ im Handel ist. Und das, ihr Leute, soll nun auch das Schlusswort sein. Macht es gut. BW