

# Längen

B. Waldmüller

5. April 2014

Mathematischer Samstag am Söderblom-Gymnasium

## Zusammenfassung

Auf den ersten Blick ist der Begriff der Länge viel zu simpel für ein Thema eines Mathematischen Samstags; eine Länge kann jeder messen, der ein Lineal halten kann, wie zum Beispiel der Käfer, mit dem Richard Feynman erklärte, was gekrümmter Raum in der Physik ist. Also lasse dich nicht täuschen. Wir schauen uns zuerst ein wenig in unserem dreimensionalen (euklidischen) Kursraum um, bis wir halbwegs verstanden haben, was Gauß' berühmte Erste Fundamentalform

$$(ds)^2 = E(dx)^2 + 2F(dx)(dy) + G(dy)^2$$

bedeutet, und besuchen dann den Käfer in seinem Heimatbiotop, der hyperbolischen Ebene. In weiter Ferne erkennen wir vielleicht sogar Konturen der umfassenden Geometrie Bernhard Riemanns.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Anknüpfen an Bekanntes</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Aus der Gaußschen Flächentheorie</b>	<b>4</b>
2.1	Gaußsche Koordinaten . . . . .	4
2.2	Beispiele . . . . .	5
2.3	Tangentialebenen . . . . .	6
2.4	Die Fundamentalform . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Käfergeometrie</b>	<b>9</b>
3.1	Längenmessung in der hyperbolischen Ebene . . . . .	9
3.2	Das Lot von einem Punkt auf eine Gerade . . . . .	10
3.3	Spiegeln der Käferwelt . . . . .	11
3.4	Erkundungen in der Käferwelt . . . . .	12
3.4.1	Der Rand ist für den Käfer unerreichbar fern . . . . .	12
3.4.2	Ein Quadratweg . . . . .	12
3.4.3	Käferkreise . . . . .	13
3.5	Übungsblatt . . . . .	15
3.6	Über Winkel in regelmäßigen Käfersechsecken . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Metrische Koeffizienten der Käferwelt</b>	<b>19</b>
4.1	Vorüberlegung . . . . .	19
4.2	Die metrischen Koeffizienten der Punkte auf der $x$ -Achse . . . . .	20
4.3	Die metrischen Koeffizienten eines Punktes . . . . .	21
4.4	Der Umfang eines hyperbolischen Kreises . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Geometrie und Wirklichkeit</b>	<b>24</b>
5.1	Der klassische euklidische Raum . . . . .	24
5.2	Über Riemanns geometrische Ideen . . . . .	24
5.3	Einstein . . . . .	25
5.4	Schluss . . . . .	26
<b>6</b>	<b>Literatur</b>	<b>26</b>

# 1 Anknüpfen an Bekanntes

Es seien  $A$  und  $B$  zwei Punkte eines Raumes, die durch eine Kurve verbunden sind. Wie bestimmt man die Länge des Kurvenstücks zwischen  $A$  und  $B$ ?

Wir stellen uns vor, dass sich ein Punkt auf der Kurve von  $A$  nach  $B$  bewegt. Zur Zeit  $t$  befinde er sich an der Stelle  $P(t)$ . Eine kurze Zeitspanne  $\Delta t$  später wird er sich an der Stelle  $P(t + \Delta t)$  befinden. Er hat dann das Wegstück  $\Delta s$  zurückgelegt, und seine Durchschnittsgeschwindigkeit in der Zeitspanne  $\Delta t$  ist durch

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

gegeben. Für  $\Delta t$  gegen 0 strebt diese Durchschnittsgeschwindigkeit gegen die Momentangeschwindigkeit  $v(t)$  zur Zeit  $t$  –

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} v(t) = s'(t) \text{ ,}$$

– und für kleine  $\Delta t$  ist

$$\Delta s \approx v(t)\Delta t \text{ .}$$

Das kennt jeder hier!

Gauß schriebe hier keine Deltas und kein  $\approx$ , sondern

$$ds = v \cdot dt \text{ ,}$$

und er bezeichnete sein  $ds$  als ein Bogenelement. Diese Differentiale  $ds$  und  $dt$  waren eine geraume Zeit völlig aus der Mode, zu meiner Studienzeit geradezu verpönt. Nur Physiker arbeiteten immer damit, weil sie ihre Vorzüge nicht missen mochten. Es handelt sich dabei eigentlich um die linearen Anteile der Änderungen. Im Graphen der Funktion  $t \mapsto s(t)$  wäre  $v(t)$  die Tangentensteigung im Punkt  $(t, s(t))$ , und  $v(t)dt$  wäre ganz einfach der Zuwachs, den der Funktionswert der Tangente erfährt, wenn sich  $t$  um  $dt$  ändert. Zur Zeit Gaussens machte man sich kein großes Gewissen wegen solcher Dinge, sondern sprach ganz unbefangen von unendlich kleinen Größen. Freilich wusste Gauß, was er tat, wenn er damit umging; ganz harmlos sind sie nicht.

Wer es verstand, solche Bogenelemente zu bestimmen, bekam damit auch die Länge des Kurvenstücks. Er musste sie ja nur aufaddieren, wenn er die Reisezeit in endlich viele Abschnitte eingeteilt hatte – das gab dann einen Näherungswert für die Länge – oder integrieren, wenn er den exakten Wert haben wollte:

$$s \approx \sum_k (\Delta s)_k \quad \text{bzw.} \quad s = \int_a^b v(t) dt$$

Die Erste Fundamentalform, mit der wir uns gleich vertraut machen wollen, ist nichts anderes als ein Werkzeug zur Bestimmung von  $ds$ . Machen wir uns auf den Weg!

## 2 Aus der Gaußschen Flächentheorie

Im Jahre 1827 veröffentlichte Carl Friedrich Gauß seine Abhandlung

Disquisitiones generales circa superficies curvas.

Die deutsche Übersetzung der Abhandlung durch A. Wangerin, die später erschien, trug den Titel Allgemeine Flächentheorie. In dieser bahnbrechenden Arbeit schuf Gauß die Grundlagen der modernen Differentialgeometrie.

Wir werden heute nur wenige Ideen dieser Arbeit kennenlernen, und auch diese nur in sehr anschaulicher Form. Ich hoffe aber, dass Elemente von Raumvorstellungen erkennbar werden, die in moderner Physik verwendet werden; diese Konzepte wurden durch die Arbeit von Gauß und Riemann erst möglich.

Die Fachleute unter euch bitte ich um etwas Nachsicht. Auch der Schüler aus der EF, der noch keine Kettenregel zur Verfügung hat und gerade erst gelernt hat, mit Änderungen umzugehen, soll etwas von der Veranstaltung haben. Ich werde also nicht von bijektiven stetigen Abbildungen und dergleichen reden; wer eine formal ausformulierte Theorie sucht, findet leicht gute Lehrbücher der Differentialgeometrie; heute kann ich nicht so viel für ihn tun.

### 2.1 Gaußsche Koordinaten

Stelle dir eine Fläche im Raum vor. Wir schneiden ein kleines Stück heraus. Es soll glatt sein, also weder Kanten haben, wie die Oberfläche eines Würfels, noch Spitzen, wie ein Kegel. Denke ruhig an ein Stück der Oberfläche eines aufgepusteten Luftballons.

Wir deformieren das Flächenstück so, dass es auf eine Kreisscheibe unserer gewöhnlichen Ebene passt. Dazu dürfen wir das Flächenstück dehnen oder stauchen, aber nicht zerreißen und nicht verkleben. Jeder Punkt des Flächenstücks kommt auf einen Punkt der Kreisscheibe zu liegen, und auf jeden Punkt der Kreisscheibe soll auch nur ein Punkt des Flächenstücks kommen.

Auf unserer Kreisscheibe verwenden wir **Koordinaten**. Das können die gewöhnlichen kartesischen Koordinaten  $x$  und  $y$  sein, oder Polarkoordinaten, die die Lage eines Punktes  $P$  durch den Abstand  $r$  vom Nullpunkt und den Winkel  $\varphi$  beschreiben, um den man die positive  $x$ -Achse gegen den Uhrzeigersinn drehen muss, bis sie durch  $P$  geht. Wir folgen Gauß und bezeichnen die Koordinaten in der Regel mit  $p$  und  $q$ .

Die Koordinaten erzeugen ein Netz von Koordinatenlinien auf der Kreisscheibe. Bei den kartesischen Koordinaten sind das Parallelen zu den Koordinatenachsen, bei den Polarkoordinaten Kreise um den Nullpunkt und Strahlen, die vom Nullpunkt ausgehen. Hält man die eine Koordinate des Punktes fest und variiert die andere, so bewegt sich der Punkt auf einer Koordinatenlinie.

Wir machen nun die Deformation des Flächenstücks auf die Kreisscheibe rückgängig und übertragen dabei die Koordinatenlinien der Kreisscheibe auf das Flächenstück. Auf dem Flächenstück entstehen so zwei Systeme von Linien, und in jedem Punkt des Flächenstücks schneiden sich genau zwei Linien, eine von dem einen und eine von dem anderen System, und niemals schneiden sich in dem betrachteten Flächenstück zwei Linien des gleichen Systems.

Zu den Koordinatenlinien, die sich in einem Punkt des Flächenstücks schneiden, gehören die Koordinaten des Punktes der Kreisscheibe, der zu diesem Flächenpunkt gehört, und diese Koordinaten schreiben wir an den Punkt des Flächenstücks. Auf diese Weise erhalten wir Koordinaten der Punkte auf der Fläche, die **Gaußschen Koordinaten**.

**Experiment.** Nimm dir einen Luftballon und zeichne **vor dem Aufpusten** mit Geodreieck und Faserstift ein Gitternetz auf ein Stück des Ballons. Merke dir den Abstand der Gitterlinien! Puste den Ballon dann auf – das ist die umgekehrte Deformation des Flächenstücks zur Kreisscheibe. Das Flächenstück trägt nun Koordinatenlinien eines Gaußschen Koordinatensystems. Bewahre den Ballon auf, wir wollen daran noch einige Messungen vornehmen.

## 2.2 Beispiele

Hier siehst du zwei Beispiele. Die Fläche ist in beiden Fällen die halbe Schale der Einheitskugel. Einmal wurden kartesische Koordinaten verwandt, einmal Polarkoordinaten.

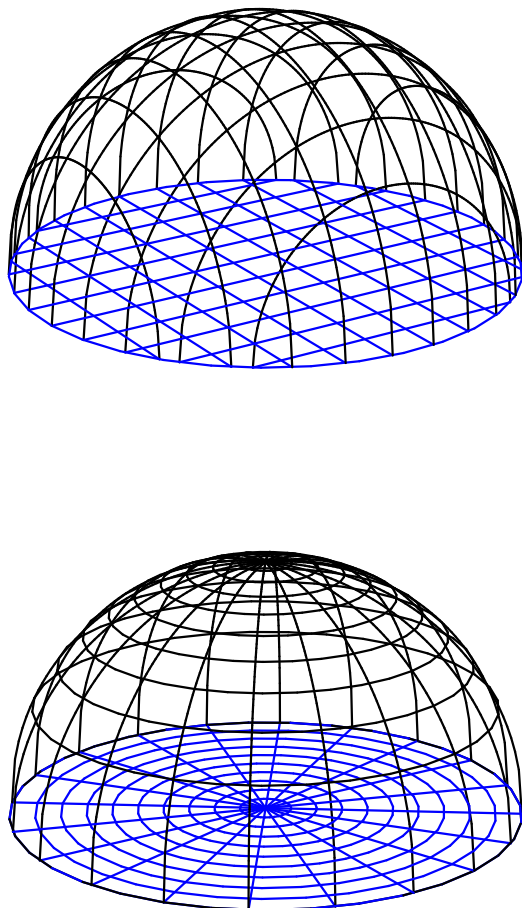


Abbildung 1: Gaußsche Koordinaten einer halben Kugelschale

## 2.3 Tangentialebenen

Wenn der aufgepustete Ballon auf dem Tisch liegt, wird die Tischplatte zu einer Tangentialebene, die den Ballon „in einem Punkt“ berührt. Da du schon Tangenten an Kurven kennst, wird dir das Konzept sofort einleuchten.

**Experiment.** Nimm den Ballon und einen ebenen durchsichtigen Gegenstand, zum Beispiel ein Geodreieck oder eine gespannte Folie, und halte Ballon und Gegenstand so, dass eine Tangentialebene entsteht, die den Ballon im Schnittpunkt zweier Koordinatenlinien berührt.



Abbildung 2: Tangentialvektoren an Koordinatenlinien. Im linken Bild ist die Tangentialebene durch einen Pfannkuchen angedeutet.

Wir wollen den Berührungspunkt mit  $P$  bezeichnen. Die  $p$ -Linie durch  $P$  trägt eine Skala. Die Werte rühren von den Koordinaten der Partnerpunkte unserer Kreisscheibe her, man kann also keineswegs Entfernungen von Punkten der Fläche ablesen – es ist gerade unser Ziel, Entfernungen auf der Fläche zu messen – du kannst aber die  $p$ -Werte als Zeiten auffassen: Ein Flächenpunkt bewegt sich längs der  $p$ -Linie, und zur Zeit  $p$  befindet er sich eben in dem Punkt der Kurve mit dem entsprechenden  $p$ -Wert. Die Geschwindigkeit des Punktes beschreibt man durch einen Tangentialvektor. Das ist anschaulich ein Pfeil, der im betrachteten Kurvenpunkt befestigt ist. Der Pfeil zeigt die momentane Bewegungsrichtung des Punktes, und seine Länge gibt die Bahngeschwindigkeit des Punktes an. Kann man den Ortsvektor des betrachteten Flächenpunktes aus den Koordinaten  $p$  und  $q$  ausrechnen, wie es bei den beiden Beispielen der Fall ist, erhält man die Komponenten des Tangentialvektors in  $P$ , indem man die Komponenten von  $P$  nach  $p$  ableitet.

Jede glatte Kurve der Ebene, die durch den Berührungspunkt  $P$  geht, hat dort einen Tangentialvektor, und der liegt in der Tangentialebene. Wir unternehmen hier keinerlei Versuche, dies nachzuweisen; ich denke, du hast kein Problem damit.

Wenden wir uns wieder der Tangentialebene zu, die die Fläche in  $P$  berührt. Nach einer winzig kleinen Zeitspanne  $dp$  hat sich der Punkt in der Fläche weiterbewegt. Da Bahngeschwindigkeit und Bewegungsrichtung des Punktes zum „Zeitpunkt“  $p$  durch Länge und Richtung des Tangentialvektors der  $p$ -Koordinatenlinie gegeben sind, wird sich der Punkt in der Nähe des Punktes befinden, zu dem man gelangt, wenn man von  $P$  um das  $dp$ -fache dieses Tangentialvektors fortschreitet. In der Nähe, wohlgemerkt! Denn der Tangentialvektor führt uns zu einem Punkt der Tangentialebene, und in aller Regel hat die Tangentialebene in der Nähe des Berührungspunktes nur den Berührungspunkt mit der Fläche gemeinsam. Aber so, wie man eine kleines Stück einer glatten Kurve näherungsweise durch ein Stück der Tangente an die Kurve in diesem Punkt ersetzt, kann man auch ein kleines Stück der Fläche in der Nähe des Berührungspunktes durch die Tangentialebene ersetzen; der Fehler strebt sehr schnell gegen Null, wenn man sich dem Berührungspunkt nähert.

## 2.4 Die Fundamentalform

Es sei  $P$  ein fester Punkt unseres Flächenstücks, seine Gaußschen Koordinaten seien  $p_0$  und  $q_0$ . Durch  $P$  verläuft eine  $p$ -Linie, ihre Punkte haben die Gaußschen Koordinaten  $p$  und  $q_0$ . Bewegt sich ein Punkt so auf der  $p$ -Linie, dass der bewegliche Punkt zur Zeit  $p$  im Punkt  $(p, q_0)$  ist, ist er gerade zur Zeit  $p_0$  in  $P$ . Seine Bahngeschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt sei  $v_p$ . In einer kleinen Zeitspanne  $\Delta p$  wird der Punkt auf der  $p$ -Linie etwa den Weg  $\Delta s \approx v_p \Delta p$  zurücklegen. Der lineare Anteil von  $\Delta s$  ist

$$ds = v_p dp \quad , \quad (1)$$

dabei ist  $dp = \Delta p$  der lineare Anteil von  $\Delta p$ .

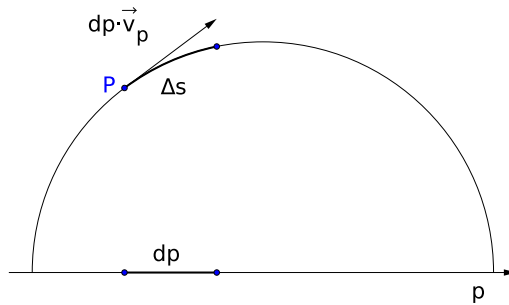


Abbildung 3: Die Größen  $dq$ ,  $\Delta s$  und  $ds = (dq) \cdot v_p$  mit  $v_p = |\vec{v}_p|$

In gleicher Weise erhalten wir für einen Punkt, der sich so auf der  $q$ -Linie durch  $P$  bewegt,

$$ds = v_q dq \quad . \quad (2)$$

Die Bewegungsrichtung des beweglichen Punktes auf der  $p$ -Linie ist durch den Tangentialvektor  $\vec{v}_p$  an die  $p$ -Linie im Punkt  $P$  gegeben, die Länge von  $\vec{v}_p$  ist gerade  $v_p$ . Ersetzen wir die Kurve in der Nähe von  $P$  durch ihre Tangente, können wir den neuen Ort des Punktes zur Zeit  $p + dp$  durch den Vektor

$$dp \cdot \vec{v}_p$$

beschreiben. Der Vektor gehört zur Tangentialebene; der Nullpunkt der Tangentialebene befindet sich dabei in  $P$ . Für den beweglichen Punkt der  $q$ -Linie erhalten wir in gleicher Weise den Vektor

$$dq \cdot \vec{v}_q \quad .$$

Das linke Bild in Abbildung 4 zeigt die Tangentialebene in  $P$  mit den Vektoren  $\vec{v}_p$  und  $\vec{v}_q$ , sie schließen einen Winkel  $\alpha$  ein. Nun sind alle Vorbereitungen getroffen. Wir betrachten eine beliebige glatte Kurve durch  $P$ . Eine kleine Änderung  $dt = \Delta t$  des Parameters bringt den beweglichen Punkt auf der Kurve um ein Wegstück der Länge  $\Delta s$  weiter. In der Tangentialebene beschreiben wir die Änderung wieder durch einen Vektor  $\vec{v}$ . Seine Richtung ist die des Tangentialvektors an die Kurve in  $P$ , seine Länge ist der lineare Anteil  $ds$  von  $\Delta s$ , das ist wieder die alte Geschichte.

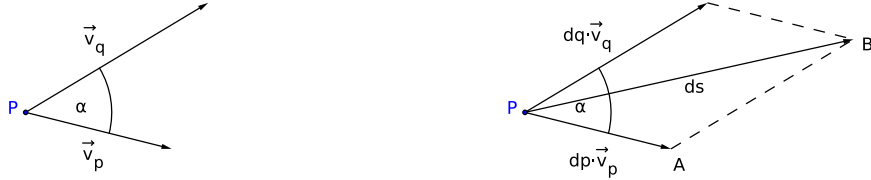


Abbildung 4: Die Tangentialvektoren  $\vec{v}_p$  und  $\vec{v}_q$  in  $P$  (links) und der Tangentialvektor  $\vec{v}$  einer Kurve durch  $P$  als Linearkombination von  $\vec{v}_p$  und  $\vec{v}_q$  (rechts)

Wir können den Vektor  $\vec{v}$  als Linearkombination von  $\vec{v}_p$  und  $\vec{v}_q$  schreiben<sup>1</sup>:

$$\vec{v} = dp \cdot \vec{v}_p + dq \cdot \vec{v}_q$$

Die Situation ist in Abbildung 4 (rechts) dargestellt, am Pfeil zum Vektor  $\vec{v}$  ist allerdings nur seine Länge  $ds$  notiert.

Nun bringt uns der Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

im Dreieck  $PAB$  ans Ziel, wir rechnen damit  $(ds)^2$  aus. Dazu brauchen wir den Winkel bei  $A$ . Er hat die Größe  $180^\circ - \alpha$ , sein Kosinuswert ist folglich  $-\cos(\alpha)$ . Wir erhalten

$$(ds)^2 = v_p^2 (dp)^2 + 2v_p v_q (dp)(dq) \cos(\alpha) + v_q^2 (dq)^2 . \quad (3)$$

Mit den Abkürzungen<sup>2</sup>

$$E := v_p^2, \quad G := v_q^2 \quad \text{und} \quad F := v_p v_q \cos(\alpha) \quad (4)$$

ergibt das die Gaußsche Erste Fundamentalform

$$(ds)^2 = E(dp)^2 + 2F(dp)(dq) + G(dq)^2 . \quad (5)$$

Die Zahlen  $E, F$  und  $G$  sind die **metrischen Koeffizienten**.

**Experiment.** Nimm deinen Luftballon und bestimme die metrischen Koeffizienten möglichst in mehreren Schnittpunkten von Koordinatenlinien.

**Aufgabe.** Berechne die metrischen Koeffizienten in einem Punkt der Einheitskugel.

<sup>1</sup>Wenn du noch keine Lineare Algebra gelernt hast, denkst du an das Kräfteparallelogramm aus dem Physikunterricht der Mittelstufe.

<sup>2</sup>Für Kenner der Linearen Algebra:  $E = \vec{v}_p * \vec{v}_p$ ,  $G = \vec{v}_q * \vec{v}_q$  und  $F = \vec{v}_p * \vec{v}_q$ .



### 3 Käfergeometrie

Er wohnt weit weg, der hyperbolische Käfer, und seine Welt ist zweidimensional, deshalb können wir ihn nicht direkt besuchen. Aber Felix Klein hat eine Karte seiner Welt entwickelt, und über diese Karte können wir mit dem Käfer kommunizieren, ihn Wege laufen lassen und Messungen durchführen lassen. Klein verwendet eine offene<sup>3</sup> Kreisscheibe  $k$  vom Radius 1 in der gewöhnlichen euklidischen Ebene. Zu jedem Punkt der Kreisscheibe gehört ein Punkt der hyperbolischen Ebene. Zu jeder (stetigen) Kurve der Kreisscheibe gehört ein Weg in der Käferwelt, und der Käfer könnte diesen Weg ablaufen. Zu Punkten  $A, B$  aus  $k$  können wir ausrechnen, wie weit der Käfer laufen muss, wenn er auf dem kürzesten Weg von  $A$  nach  $B$  will. Wie das geht, wirst du gleich sehen; vorher will ich aber noch erwähnen, dass des Käfers kürzester Weg gerade der ist, der auf unserer Karte die Strecke  $\overline{AB}$  ist – das ist der große Vorteil von Kleins Karte, und deshalb verwende ich sie auch.

#### 3.1 Längenmessung in der hyperbolischen Ebene

Es seien also zwei Punkte  $A, B$  in  $k$  gegeben. Willst du den Abstand der entsprechenden Punkte in der Käferwelt bestimmen, musst du die Sehne  $\overline{RS}$  betrachten, die die Gerade  $AB$  mit  $k$  gemeinsam hat. Vorsicht: Du weißt, dass es zu den Endpunkten  $R$  und  $S$  der Sehne keine Punkte der Käferwelt gibt. Nun haben wir also die Sehne  $\overline{RS}$  mit den inneren Punkten  $A$  und  $B$ .

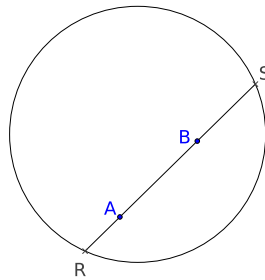


Abbildung 5: Kartenpunkte  $A, B$  mit Sehne  $\overline{RS}$

Für das Weitere benötigen wir das sogenannte **Doppelverhältnis**.

##### 1 Definition

Es seien  $P_1, P_2, P_3, P_4$  vier paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden der euklidischen Ebene. Die Gerade sei mit einer linearen Skala versehen, wie die  $x$ -Achse des Koordinatensystems, und die Skalenwerte der Punkte seien die Zahlen  $z_1, z_2, z_3, z_4$ . Natürlich gehört  $z_1$  zu  $P_1$ , usw. Dann ist das **Doppelverhältnis** der Punkte gegeben durch

$$DV(P_1, P_2, P_3, P_4) := \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)} .$$

Dieses Doppelverhältnis ist etwas gewöhnungsbedürftig. Es ändert seinen Wert nicht, wenn man von der gewählten Skala auf der Geraden zu einer anderen linearen Skala übergeht. Und bei zahlreichen wichtigen Abbildungen haben die Bildpunkte  $P'_1, P'_2, P'_3, P'_4$  wieder das gleiche Doppelverhältnis wie die ursprünglichen Punkte – sogar wenn du etwa die Ebene durch eine Zentralprojektion des Raumes auf eine andere Ebene abbildest. Das Doppelverhältnis ist also eine sehr markante Eigenschaft der Punktreihe.

<sup>3</sup>Der Rand, also die Kreislinie, gehört nicht zu  $k$  dazu.

Kommen wir nun zur Definition des hyperbolischen Abstandes.

## 2 Definition

Es seien  $A$  und  $B$  zwei verschiedene Punkte der Sehne  $\overline{RS}$  der offenen Kreisscheibe  $k$ . Dann ist der **hyperbolische Abstand**  $\text{dh}(A, B)$  der entsprechenden Punkte der hyperbolischen Ebene definiert durch

$$\text{dh}(A, B) := \frac{1}{2} |\ln(DV(A, B, R, S))| \quad .$$

So also werden Längen gemessen im Käferland. Aber keine Sorge, du musst damit nicht viel rechnen, das erledigen MuPAD und Geogebra für dich. Im Übungsteil kannst du dich etwas mit der Sache vertraut machen.

## 3.2 Das Lot von einem Punkt auf eine Gerade

Winkel im Käferland sind eine recht komplizierte Angelegenheit, wir werden uns damit nicht befassen. Allerdings benötigen wir rechte Winkel. Es seien  $P$  ein Punkt und  $\overline{CD}$  eine Sehne der Kreisscheibe  $k$ . Wir wollen das Lot von  $P$  auf die Sehne fällen. Das geht auf folgende Weise: Zeichne die Tangenten an die Kreislinie in den Punkten  $C$  und  $D$ . Wenn sie sich in einem Punkt  $Z$  schneiden, zeichnest du die Gerade  $PZ$ . Diese Gerade hat mit  $k$  eine Sehne gemeinsam, und die ist die Lotgerade. Der Winkel zwischen den entsprechenden Geraden im Käferland ist ein rechter Winkel. Falls sich die Tangenten nicht schneiden, muss  $\overline{CD}$  ein Durchmesser von  $k$  sein. In diesem Fall gehört die Sehne durch  $P$ , die im euklidischen Sinne senkrecht auf  $\overline{CD}$  steht, zur Lotgeraden im Käferland.

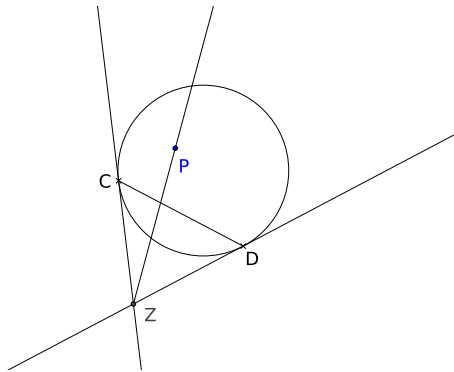


Abbildung 6: Lot von  $P$  auf  $\overline{CD}$

### 3.3 Spiegeln der Käferwelt

Zur Geometrie gehören immer auch Abbildungen, die mit der Geometrie verträglich sind; in unserer euklidischen Geometrie sind das Bewegungen wie Drehungen und Verschiebungen oder eben Spiegelungen. Unsere Kreisscheibe  $k$  können wir um den Nullpunkt drehen oder an einem Durchmesser spiegeln, dabei bleiben die Abstände der entsprechenden Punkte in der Käferwelt und auch rechte Winkel in der Käferwelt erhalten. Alle diese Abbildungen lassen den Mittelpunkt  $M$  unserer Kreisscheibe liegen. Ist etwa sein Partnerpunkt in der Käferwelt ein ausgezeichnete Punkt dort? Könnte man meinen, aber es stimmt nicht, und damit das klar wird, zeige ich dir eine weitere Abbildung der Kreisscheibe auf sich, die mit der Käfergeometrie verträglich ist: eine Art hyperbolischer Spiegelung<sup>4</sup>.

Spiegelungsachse ist eine Sehne  $\overline{CD}$ . Wir können  $k$  so drehen, dass  $\overline{CD}$  auf der  $x$ -Achse senkrecht steht – euklidisch oder hyperbolisch kommt hier auf das Gleiche hinaus – und dass sie die  $x$ -Achse bei  $x = d > 0$  schneidet. Die Punkte der Sehne selbst bleiben natürlich fest unter der Spiegelung. Es sei nun  $P$  ein Punkt der Kreisscheibe, der nicht zu  $\overline{CD}$  gehört. Seinen Bildpunkt  $P'$  findet man auf folgende Weise. Man konstruiert wieder den Tangentenschnittpunkt  $Z$ , den du schon von den Loten her kennst, und zeichnet die Gerade durch  $Z$  und  $P$ . Diese Gerade schneidet die Sehne  $\overline{CD}$  in einem Punkt  $Q$ . Der Bildpunkt  $P'$  von  $P$  ist dann der eindeutig bestimmte Punkt auf  $ZP$ , für den

$$DV(P, P', Z, Q) = -1 \quad (6)$$

ist. Man sagt, dass die vier Punkte harmonische Punkte seien, aber dem gehen wir nicht weiter nach.

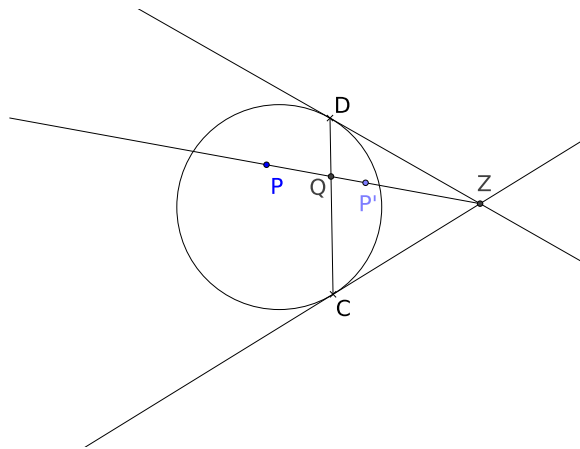


Abbildung 7: Hyperbolische Spiegelung an  $\overline{CD}$

Die Sehne  $\overline{CD}$  teilt den Kreis in zwei Teile, und es wird jeder Punkt des einen Teils auf einen Punkt des anderen Teiles abgebildet. Ist  $P'$  Bildpunkt von  $P$ , so ist auch  $P$  Bildpunkt von  $P'$ , wie es sich für eine Spiegelung gehört. Der Bildpunkt  $M'$  des Kreismittelpunktes  $M$  liegt in dem Teil des Kreises rechts der Sehne  $\overline{CD}$ . Für den Käfer gibt es überhaupt keinen qualitativen Unterschied zwischen seinen Punkten zu  $M$  und zu  $M'$ . Stellt er sich in den Punkt zu  $M$  und schaut um sich, sieht er seine Ebene, die sich eintönig in alle Richtungen erstreckt, und genau das Gleiche sieht er, wenn sich in den Punkt zu  $M'$  begibt.

<sup>4</sup>Der korrekte Name der Abbildung ist polare Homologie, siehe Filler Seite 195

### 3.4 Erkundungen in der Käferwelt

#### 3.4.1 Der Rand ist für den Käfer unerreichbar fern

Wir setzen zwei Käfer in den Punkt zu unserem Kartenpunkt  $(0, 0)$  und weisen sie an, auf einer Geraden in entgegengesetzten Richtungen loszulaufen und jeweils den Punkt zu markieren, an dem sie sich befinden, wenn sie wieder eine halbe hyperbolische Einheit zurückgelegt haben. Hier siehst du, was dabei herauskommt.

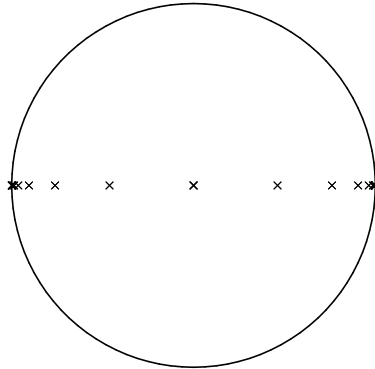


Abbildung 8: Reihe von Punkten, die in der Käferwelt äquidistant sind

Zur Verdeutlichung siehst du hier eine Skizze des Graphen der Funktion

$$x \mapsto \text{dh}((0, 0), (x, 0)) = \frac{1}{2} |\ln |(DV(0, x, -1, 1))| \quad \text{für } 0 < x < 1.$$

Ihre Bedeutung sollte dir klar sein. Es gilt

$$\text{dh}((0, 0), (x, 0)) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} \infty .$$

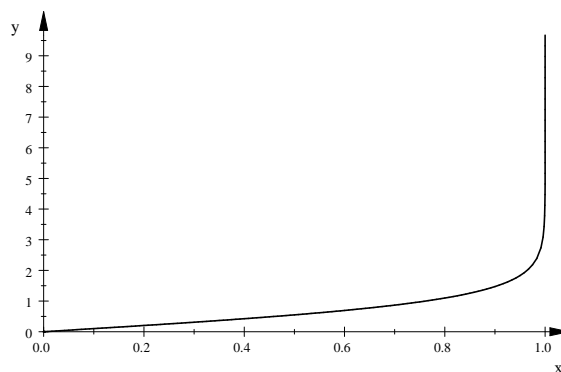


Abbildung 9: Graph der Funktion  $x \mapsto \text{dh}((0, 0), (x, 0))$

#### 3.4.2 Ein Quadratweg

Nun wollen wir den Käfer anweisen, von einem beliebigen Startpunkt aus eine halbe hyperbolische Einheit in eine beliebige Richtung zu laufen, den erreichten Punkt zu markieren, seine Laufrichtung um einen rechten Winkel nach links zu ändern und wieder eine halbe hyperbolische Einheit zu laufen und diese letzte Anweisung noch zweimal zu wiederholen.

Der Käfer, der seine euklidische Geometrie gelernt hat, weiß natürlich, dass er dann wieder an seinem Startpunkt herauskommen muss. Führt er die Anweisungen aus, kommt er aber nicht wieder am Startpunkt an – ein klarer Hinweis darauf, dass euklidische Geometrie nicht für seine Welt passt.

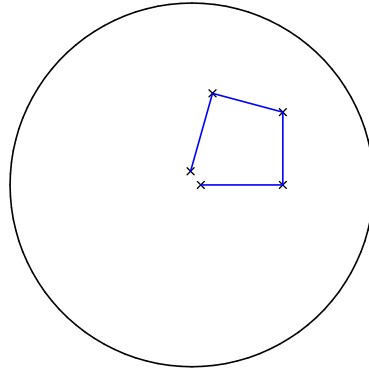


Abbildung 10: Versuch des Käfers, ein Quadrat zu umlaufen

### 3.4.3 Käferkreise

Weist man einen Käfer an, mit seiner ganzen Sippe immer wieder von einem festen Startpunkt aus in alle möglichen Richtungen eine hyperbolische Einheit weit zu laufen und den erreichten Punkt zu markieren, erhält man etwas, was in der Käferwelt ein Kreis um den Startpunkt mit dem Radius 1 sein sollte. Der Käfer könnte sich auch ein Seil der Länge 1 besorgen, sich damit in den Startpunkt stellen und sich vom jüngsten Käferkind bei gespanntem Seil umrunden lassen; es käme die gleiche Punktmenge dabei heraus. Eine Sammlung von Kreisen mit gleichen Radien findest du in Abbildung 11 auf Seite 14.

Für uns ist es am einfachsten, als Startpunkt den Punkt zu unserem Kartenzentrum  $(0, 0)$  zu nehmen; dem Käfer ist das völlig gleich. Versuche, mit Geogebra einen möglichst genauen Näherungswert für den Umfang des Kreises zu bestimmen (siehe Aufgabenteil).

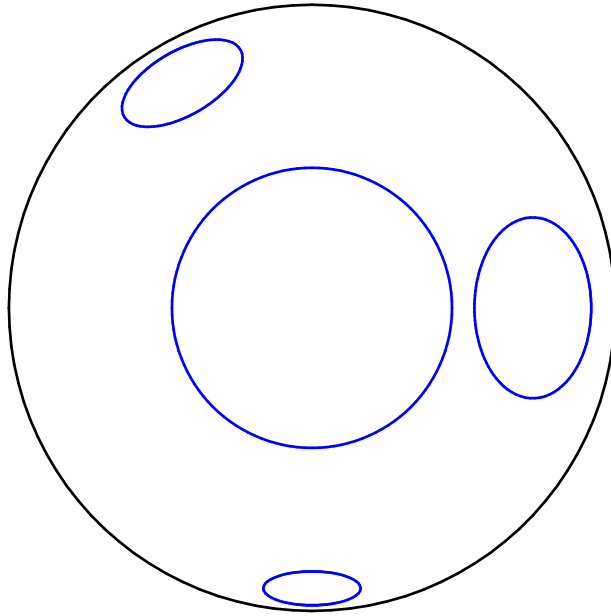


Abbildung 11: Einige Kreise mit gleichem Radius  $\frac{1}{2}$

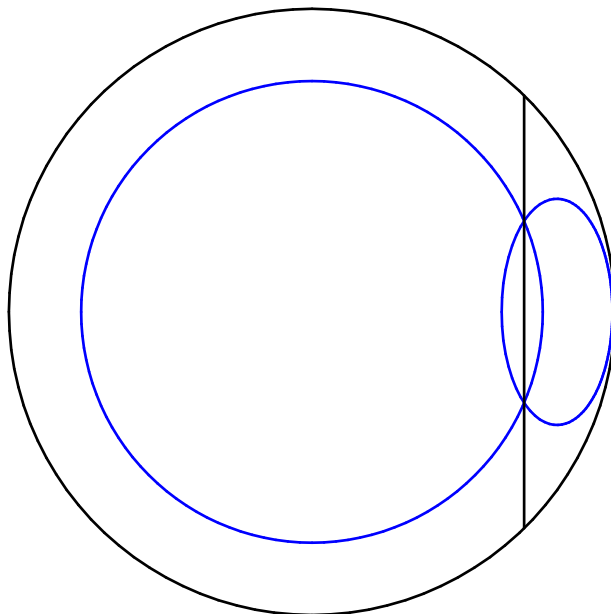


Abbildung 12: Kreis um  $(0,0)$  mit dem Radius 1 und sein Spiegelbild an der Achse  $x = \frac{7}{10}$

### 3.5 Übungsblatt

#### 1. Mit Geogebra in der Käferwelt Längen messen

Wir messen natürlich in unserer Karte, nicht in der Käferwelt selbst. Öffne ein Geogebraarbeitsblatt und lasse dir einen Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius 1 zeichnen. Vergrößere dann dein Zeichenblatt so, dass der Kreis eine vernünftige Größe hat. Wähle nun Punkte  $R$  und  $S$  auf der Kreislinie, verbinde sie und wähle Punkte  $A$  und  $B$  auf der Sehne  $\overline{RS}$  im Inneren des Kreises. Lasse dir nötigenfalls zeigen, wie du den Namen von Objekten ändern kannst. Geogebra kennt den Befehl „Doppelverhältnis“, am besten definierst du durch die Eingabe

$$dv = \text{Doppelverhaeltnis}(A, B, R, S)$$

im Eingabefenster die Größe  $dv$ . Ihren Wert kannst du in der Liste links ablesen. Er wird ständig aktualisiert, wenn du deine Punkte bewegst.

Zusätzlich kannst du dir nun auch durch

$$dh = 1/2 * \text{abs}(\ln(dv))$$

den hyperbolischen Abstand von  $A$  und  $B$  anzeigen lassen. Experimentiere ein wenig damit. Kannst du einige äquidistante Punkte erzeugen?

#### 2. Das Lot von einem Punkt auf eine Gerade fallen

Beginne wieder mit dem Einheitskreis mit der Sehne  $\overline{RS}$  und wähle einen Punkt  $P$  im Kreisinneren. Fülle das Lot von  $P$  auf  $\overline{RS}$  so, wie es im Text beschrieben ist. Auf dem Lot liegt auch der Bildpunkt  $P'$  von  $P$  unter der hyperbolischen Spiegelung an der Sehne. Findest du ihn?

#### 3. Ein Quadrat ablaufen

Versuche, den Käfer ein Quadrat ablaufen zu lassen, wie es im Text beschrieben ist.

#### 4. Rechtecke

Untersuche, ob es in der Käferwelt Rechtecke gibt, also Vierecke mit vier rechten Winkeln.

#### 5. Umfang eines Kreises

Nur wenn du als Kreismittelpunkt den zentralen Punkt unserer Karte nimmst, sieht ein Kreis auf der Karte so aus wie ein euklidischer Kreis. Also lasse dir von Geogebra einen Kreis um den Punkt  $(0, 0)$  zeichnen und denke dir aus, wie der Käfer näherungsweise seinen Umfang messen kann. Der Käfer kann ja nur die Länge einer Strecke messen! Vielleicht hilft es dir, nachzudenken, wie du seinerzeit euklidische Kreise ausgemessen hast.

#### 6. Zum Nullpunkt gehört kein ausgezeichneter Punkt der Käferwelt

Bestimme zu jedem  $r$  mit  $0 < r < 1$  ein  $a \in [0, 1]$  so, dass die hyperbolische Spiegelung an der Geraden  $x = a$  den Nullpunkt mit dem Punkt  $(r, 0)$  vertauscht. [Tipp: Die Zahl  $a$  muss  $DV(0, r, a, \frac{1}{a}) = -1$  erfüllen.]

#### 7. Invarianz des Doppelverhältnisses bei Umskalierung der Geraden

Wenn die Gerade, auf der die vier Punkte liegen, eine lineare Skala  $x$  trägt und  $u$  eine andere lineare Skala auf der Geraden ist, hängen die Werte  $x$  und  $u$  eines Geradenpunktes durch eine Beziehung der Art

$$u = mx + b$$

zusammen. Zeige, dass es egal ist, ob man das Doppelverhältnis von vier Geradenpunkten nach der  $x$ - oder nach der  $u$ -Skala berechnet. Wenn dir das zu allgemein ist, überlege dir, dass es nichts macht, wenn du nur die Orientierung auf der Geraden änderst.

### 3.6 Über Winkel in regelmäßigen Käfersechsecken

Es gibt ein regelmäßiges Käfersechseck, dessen Innenwinkel rechte Winkel sind!<sup>5</sup> Es solches Sechseck wollen wir nun konstruieren.

Wir beginnen mit einer Strecke  $\overline{AM}$  der Länge 2. Aus  $A$  erhalten wir  $B$  durch Drehung um  $M$  um  $120^\circ$  und  $C$  durch Drehung um  $M$  um  $240^\circ$ . Das erhaltene gleichseitige Dreieck  $ABC$  spiegeln wir an  $M$ . Nun haben wir zwei kongruente gleichseitige Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  mit gemeinsamem Schwerpunkt (siehe Abbildung 13).

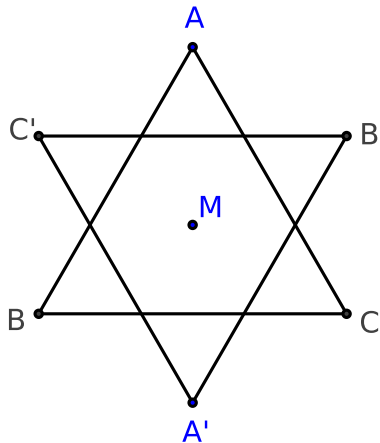


Abbildung 13: Kongruente gleichseitige Dreiecke mit gemeinsamem Schwerpunkt

Die Schnittmenge der beiden Dreiecke ist ein regelmäßiges Sechseck, seine Kantenlänge ist ein Drittel der Kantenlänge der Dreiecke.<sup>6</sup>

Wir suchen nun einen Kreis um  $M$  so, dass die Berührungspunkte der Tangenten von  $A$  an den Kreis auf der Geraden  $B'C'$  liegen, denn wenn wir diesen Kreis als Karte des Käferlandes nehmen, schneiden dort die Geraden zu  $AB$  und zu  $AC$  die Gerade zu  $B'C'$  unter rechten Winkeln.

Den Radius des gesuchten Kreises finden wir mit Hilfe des euklidischen Kathetensatzes: Zeichnen wir von einem Punkt  $P$  außerhalb eines Kreises um  $M$  die Tangenten an den Kreis, steht die Verbindungsstrecke der Berührungspunkte  $R$  und  $S$  auf der Strecke  $\overline{MP}$  senkrecht, und der Schnittpunkt  $H$  der Strecken ist der Fußpunkt des Lotes von  $R$  auf die Strecke. Das Dreieck  $MPR$  hat einen rechten Winkel bei  $R$ , nach dem Kathetensatz ist folglich (siehe Abbildung 14)

$$d(M, H) \cdot d(M, P) = d(M, R)^2 = r^2 \quad .$$

Für den Radius  $r$  unseres gesuchten Kreises bedeutet das

$$r^2 = 1 \cdot 2 \quad ,$$

also

$$r = \sqrt{2} \quad .$$

<sup>5</sup>Dieser Abschnitt wurde nachträglich in das Skript aufgenommen, er wurde angeregt durch eine Konstruktion David Schmidts.

<sup>6</sup>Das liegt daran, dass der Schwerpunkt  $M$  der Dreiecke die Seitenhalbierenden im Verhältnis  $1 : 2$  teilt.



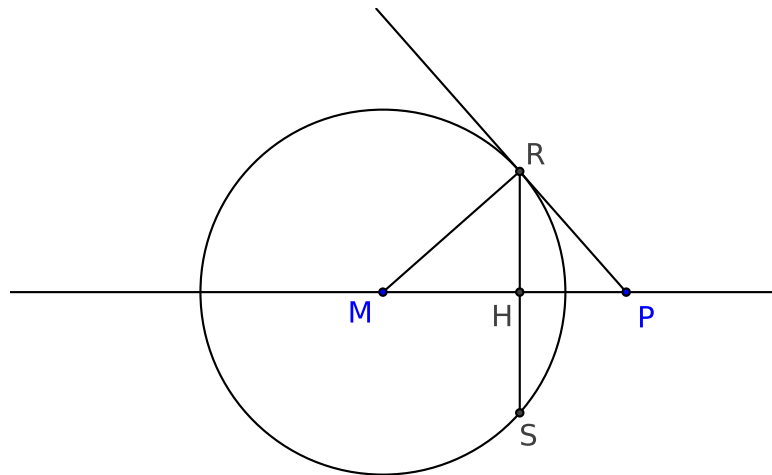


Abbildung 14: Kathetensatz im Dreieck  $MPR$

Im Kleinschen Modell der hyperbolischen Ebene, das durch den Kreis um  $M$  mit dem Radius  $\sqrt{2}$  gegeben ist, ist das Sechseck regelmäßig, und seine Innenwinkel sind rechte. Ein solches Sechseck ist in Abbildung 15 zu sehen. Seine Winkelsumme ist  $6 \cdot 90^\circ = 540^\circ$ , sie ist also deutlich kleiner als die übliche Innenwinkelsumme im (euklidischen) Sechseck.

Es erhebt sich die Frage, wie sich die Innenwinkel des Sechsecks verhalten, wenn wir die Größe des Sechsecks verändern. Wir wollen das Sechseck aus Abbildung 15 durch eine zentrische Streckung mit Streckzentrum  $M$  etwas vergrößern. Abbildung 16 zeigt den (unveränderten) Kreis und den oberen Teil des vergrößerten Sechsecks. Die obere Kante liegt auf einer Sehne  $\overline{RS}$  des Kreises. Die Tangenten an den Kreis in den Punkten  $R$  und  $S$  schneiden sich in einem Punkt  $Z$ . Der Strahl von  $Z$  durch einen der neuen Eckpunkte auf  $RS$  steht senkrecht auf  $RS$ . Dies zeigt, dass die Innenwinkel des neuen regelmäßigen Sechsecks kleiner sind als  $90^\circ$ . Im Käferland hängt die Innenwinkelsumme im regelmäßigen Sechseck von der Größe des Sechsecks ab!

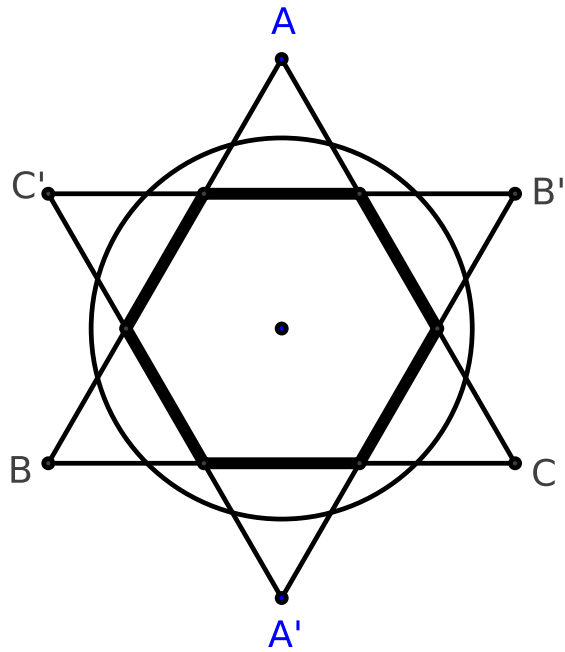


Abbildung 15: Regelmäßiges Käfersechseck, dessen Innenwinkel rechte Winkel sind

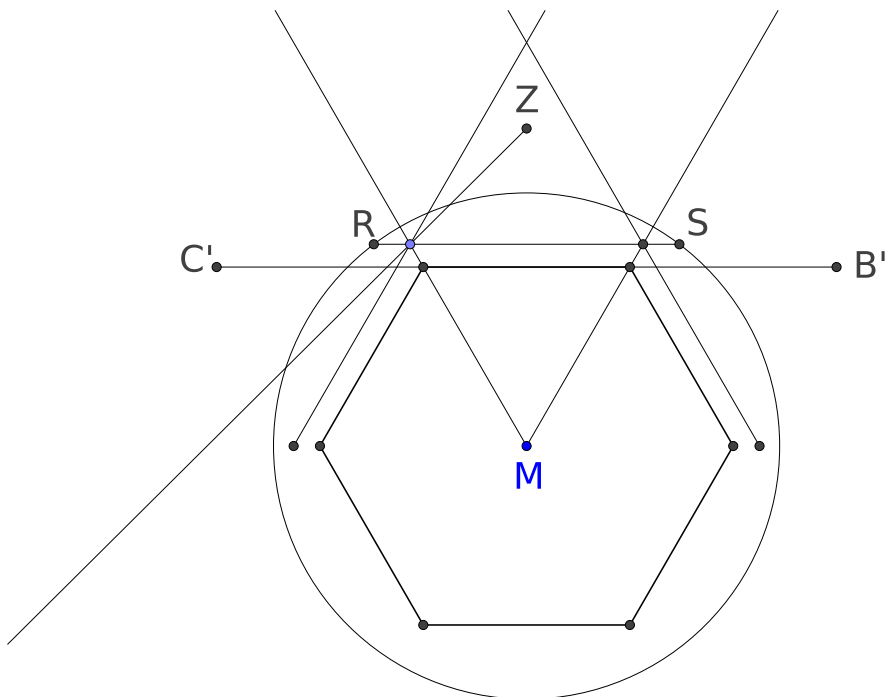


Abbildung 16: Durch zentrische Streckung vergrößertes regelmäßiges Käfersechseck hat kleinere Innenwinkel als rechte Winkel

## 4 Metrische Koeffizienten der Käferwelt

Wir verwenden unsere Kleinsche Karte der Käferwelt mit gewöhnlichen kartesischen Koordinaten. Unser Ziel ist, für jeden Kartenpunkt  $P(x, y)$  die metrischen Koeffizienten  $E, F$  und  $G$  der ersten Fundamentalform

$$(ds)^2 = E(dx)^2 + 2F(dx)(dy) + G(dy)^2$$

des Punktes des Käferwelt zu bestimmen, der zu  $P$  gehört.

### 4.1 Vorüberlegung

Für  $0 \leq r < 1$  ist  $P(r, 0)$  ein Punkt unserer Karte auf der positiven  $x$ -Achse. Wir betrachten eine Sehne  $\overline{RS}$ , die mit der positiven  $x$ -Achse den Winkel  $\theta$  bildet.<sup>7</sup> Den Mittelpunkt der Sehne bezeichnen wir mit  $Z$ . Die Länge der Sehne ist  $2l$  mit

$$l = \sqrt{1 - r^2 \sin^2(\theta)}$$

– siehe Abbildung 17.

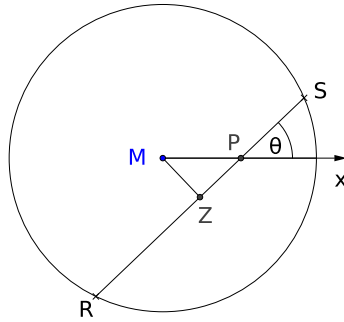


Abbildung 17: Punkt auf der positiven  $x$ -Achse mit Sehne  $\overline{RS}$

Die Sehne  $\overline{RS}$  trägt in natürlicher Weise eine Skala: der Punkt  $R$  hat den Skalenwert 0,  $S$  den Skalenwert  $2l$  und  $Z$  den Skalenwert  $l$ . Für  $0 < t < l$  sei  $Q(t)$  der Punkt der Strecke  $\overline{ZS}$  mit dem Skalenwert  $l + t$ . Die hyperbolische Entfernung  $\text{dh}(Z, Q(t))$  ist dann eine Funktion von  $t$ . Sie ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{dh}(Z, Q(t)) &= \frac{1}{2} |\ln(\text{DV}(Z, Q(t), R, S))| \\ &= \frac{1}{2} \left| \ln \left( \frac{l(t-l)}{(l+t)(-l)} \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \ln \left( \frac{l-t}{l+t} \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{l+t}{l-t} \right) , \end{aligned}$$

und für ihre Ableitung erhalten wir

$$\frac{d}{dt} [\text{dh}(Z, Q(t))] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{l+t}{l-t} \right) \right] = \frac{l}{l^2 - t^2} .$$

<sup>7</sup>Gauß zu Ehren verwende ich die Originalbezeichnungen aus seiner berühmten Arbeit, obwohl sie für dich ungewohnt sind.

Zum Punkt  $P$  gehört der Skalenwert  $t = r \cos(\theta)$ . Setzen wir diesen Wert in die Ableitung ein, ergibt das

$$\frac{l}{l^2 - r^2 \cos^2(\theta)} = \frac{\sqrt{1 - r^2 \sin^2(\theta)}}{1 - r^2 \sin^2(\theta) - r^2 \cos^2(\theta)} = \frac{\sqrt{1 - r^2 \sin^2(\theta)}}{1 - r^2} .$$

Wir halten das Ergebnis zum späteren Gebrauch fest: Die positive  $x$ -Achse werde von der Sehne  $\overline{RS}$  unter dem Winkel  $\theta$  im Punkt  $P(r, 0)$  geschnitten, wie in Abbildung 17 dargestellt. Zum Linienelement  $dt$  der Strecke  $\overline{PS}$ , das in  $P$  beginnt, gehört dann das Linienelement  $ds$  der hyperbolischen Ebene mit

$$(ds)^2 = \frac{1 - r^2 \sin^2(\theta)}{(1 - r^2)^2} \cdot (dt)^2 . \quad (7)$$

## 4.2 Die metrischen Koeffizienten der Punkte auf der $x$ -Achse

Aus Gleichung (7) können wir die metrischen Koeffizienten eines Punktes  $P(r, 0)$  mit  $0 \leq r < 1$  berechnen. Indem wir  $\theta = 0$  setzen, erhalten wir<sup>8</sup>

$$E = \frac{1}{(1 - r^2)^2} ,$$

und für  $\theta = 90^\circ$

$$G = \frac{1 - r^2}{(1 - r^2)^2} = \frac{1}{1 - r^2} .$$

Um  $F$  zu bestimmen, bilden wir

$$\begin{aligned} E(dx)^2 + G(dy)^2 &= \frac{1}{(1 - r^2)^2} \cdot \cos^2(\theta)(dt)^2 + \frac{1}{1 - r^2} \cdot \sin^2(\theta)(dt)^2 \\ &= \frac{\cos^2(\theta) + (1 - r^2) \sin^2(\theta)}{(1 - r^2)^2} \cdot (dt)^2 \\ &= \frac{1 - r^2 \sin^2(\theta)}{(1 - r^2)^2} \cdot (dt)^2 , \end{aligned}$$

und dies ist nach Gleichung (7) gerade  $(ds)^2$ . Es folgt  $F = 0$ .

Wir halten das Ergebnis fest: Für Punkte  $P(r, 0)$  auf der positiven  $x$ -Achse lautet die erste Fundamentalform

$$(ds)^2 = \frac{1}{(1 - r^2)^2} \cdot (dx)^2 + \frac{1}{1 - r^2} \cdot (dy)^2 . \quad (8)$$

---

<sup>8</sup>Beachte, dass  $dx = \cos(\theta)dt$  und  $dy = \sin(\theta)dt$  ist.

### 4.3 Die metrischen Koeffizienten eines Punktes

Es sei  $P(x, y)$  ein Punkt unserer Kreisscheibe. Wir können uns auf den Fall beschränken, dass  $x$  und  $y$  positiv sind: eine Drehung der Kreisscheibe um den Nullpunkt lässt alle Abstände von Punkten der Scheibe fest, lässt deshalb alle Doppelverhältnisse invariant und bewirkt somit eine Isometrie (=längentreue Abbildung) der Käferwelt.

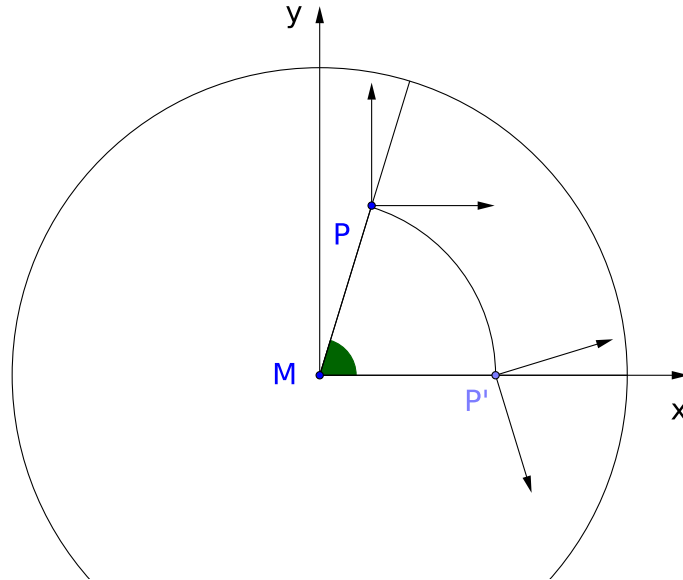


Abbildung 18: Punkt  $P$  im ersten Quadranten

Die Situation ist in Abbildung 18 dargestellt. Der Punkt  $P'(r, 0)$  auf der Achse entsteht aus dem betrachteten Punkt  $P(x, y)$  durch Drehung im Uhrzeigersinn um den Winkel  $\alpha$ , den der Strahl vom Nullpunkt durch  $P$  mit der positiven  $x$ -Achse bildet; dabei ist  $r^2 = x^2 + y^2$ .

Der Pfeil in  $y$ -Richtung, der in  $P$  beginnt, geht dabei in den Pfeil bei  $P'$ , der mit der positiven  $x$ -Achse den Winkel  $90^\circ - \alpha$  bildet. Deshalb liefert Gleichung (7) auf Seite 20 mit  $\theta = 90^\circ - \alpha$  sofort

$$G = \frac{1 - r^2 \cos^2(\alpha)}{(1 - r^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 - x^2 - y^2)^2} . \quad (9)$$

Nachdem wir uns vergewissert haben, dass es nichts macht, dass der Winkel  $\alpha$  in  $P'$  im Uhrzeigersinn abgetragen ist, erhalten wir in gleicher Weise aus Gleichung (7) mit  $\theta = \alpha$

$$E = \frac{1 - r^2 \sin^2(\alpha)}{(1 - r^2)^2} = \frac{1 - y^2}{(1 - x^2 - y^2)^2} . \quad (10)$$

Um  $F$  zu bestimmen, bewegen wir uns in Richtung des Strahles vom Nullpunkt durch  $P$ . Nach Gleichung (7) mit  $\theta = 0$  ist

$$(ds)^2 = \frac{1}{(1 - r^2)^2} \cdot (dt)^2 .$$

Davon subtrahieren wir

$$\begin{aligned}
 E(dx)^2 + G(dy)^2 &= \frac{1 - r^2 \sin^2(\alpha)}{(1 - r^2)^2} \cos^2(\alpha) \cdot (dt)^2 + \frac{1 - r^2 \cos^2(\alpha)}{(1 - r^2)^2} \sin^2(\alpha) \cdot (dt)^2 \\
 &= \frac{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) - 2r^2 \sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha)}{(1 - r^2)^2} \cdot (dt)^2 \\
 &= \frac{1}{(1 - r^2)^2} \cdot (dt)^2 - 2 \frac{r^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{(1 - r^2)^2} \cdot (dx)(dy) \ ,
 \end{aligned}$$

das Ergebnis muss  $2F(dx)(dy)$  sein. Es ergibt sich

$$F = \frac{r^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{(1 - r^2)^2} = \frac{xy}{(1 - x^2 - y^2)^2} \ . \quad (11)$$

Als metrische Koeffizienten der Punkte der Käferwelt kommen nur die in den Gleichungen (9), (10) und (11) angegebenen  $G, E$  und  $F$  in Frage!

#### 4.4 Der Umfang eines hyperbolischen Kreises

Wir wollen unsere neuen Fähigkeiten dazu benutzen, den Umfang eines Käferkreises zu berechnen. Zu einem Kreis um den Nullpunkt unserer Kreisscheibe mit dem (euklidischen) Radius  $r$  gehört ein Käferkreis mit dem Radius  $\rho$ , den wir später noch berechnen.

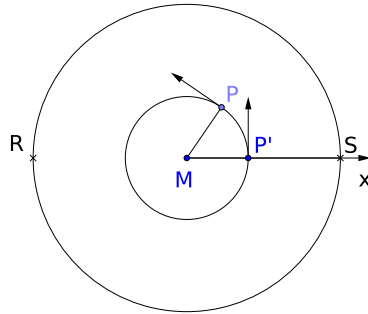


Abbildung 19: Kreis mit dem Radius  $r$  um den Nullpunkt

Die Größe des Bogenelements  $ds$  berechnen wir mit Gleichung (7) auf Seite 20 mit  $\theta = 90^\circ$  zu

$$ds = \sqrt{\frac{1-r^2}{(1-r^2)^2}}(dt)^2 = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \cdot dt .$$

Der Umfang  $U$  des Kreises in der Käferwelt ist dann

$$U = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \int_a^b dt = \frac{2\pi r}{\sqrt{1-r^2}} .$$

Der Radius  $\rho$  in der Käferwelt ist gegeben durch

$$\rho = \frac{1}{2} |\ln(\text{DV}(M, P', R, S))| = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+r}{1-r} \right) .$$

Man löst die Gleichung nach  $r$  auf zu

$$r = \frac{e^{2\rho} - 1}{e^{2\rho} + 1} .$$

Setzt man dies für  $r$  in die Gleichung für  $U$  ein und vereinfacht, bekommt man für den Umfang eines Käferkreises mit dem Radius  $\rho$  das Ergebnis

$$U = 2\pi \cdot \frac{e^\rho - e^{-\rho}}{2} . \quad (12)$$

Der Umfang wächst, anders als in der euklidischen Welt, **nicht** linear mit dem Radius.

## 5 Geometrie und Wirklichkeit

### 5.1 Der klassische euklidische Raum

Wenn ich ein räumliches Koordinatensystem einführe, nehme ich den Kursraum als Modell; da sind Fußleisten für die Achsen, Boden und Wände für die Koordinatenebenen, und die Lote von einem Punkt auf eine Koordinatenebene liefern die Koordinaten des Punktes. Da alle mit dem  $xy$ -System der Ebene vertraut sind, macht das praktisch nie Probleme; man ist im Handumdrehen beim  $\mathbb{R}^3$  und kann die übliche Theorie hochfahren und die üblichen Aufgaben rechnen. Die Anwendungsaufgaben spielen im Kursraum oder in anderen Gebäuden, allenfalls kommen noch Schiffe oder Flugzeuge vor. Geraden und Ebenen lassen sich als Mengen von Koordinatenspalten beschreiben, und damit kann man die Aufgaben rechnen. Von der Ursprungsgeraden mit dem allgemeinen Vektor  $\vec{x} = r\vec{v}$  benutzen wir dabei nur ein Stück um den Nullpunkt herum, obwohl wir ja innerhalb des Raumes  $\mathbb{R}^3$  für  $r$  auch  $10^{1000}$  einsetzen könnten.

Euklid stellte sich, wenn ich recht informiert bin, eine Gerade keineswegs als unendlich langes Gebilde vor; er wollte nur, dass man sie in beiden Richtungen unbegrenzt verlängern kann. Hat unsere Gerade

$$g = \{ r\vec{x} \mid r \in \mathbb{R}^3 \} \subseteq \mathbb{R}^3$$

eine Entsprechung in der Wirklichkeit? Können wir die  $x$ -Achse des Systems, das wir in Form der Fußleiste handgreiflich vor Augen haben, vier Millionen Lichtjahre weit verfolgen?

Landvermesser verwenden Lichtstrahlen anstelle gerader Stangen, ob ein Brett gerade ist, prüft ein Tischler, indem er daran entlangschaut, und mit Laserstrahlen kann man Punkte markieren und ihre Orte vermessen. Könnte man nicht die Achsen des Systems und die Lote auf die Flächen mit Hilfe von Lichtstrahlen realisieren? Abgesehen davon, wie man einen Lichtstrahl, der Millionen von Lichtjahren lang ist, realisieren wollte, steht dem ein seltsames Phänomen entgegen: Lichtstrahlen, die im Vakuum unterwegs sind, werden durch Massen abgelenkt. So kann es geschehen, dass Lichtstrahlen, die von einem Punkt eines weit entfernten Sterns ausgehen und auf dem Weg zum Auge des Beobachters eine große Masse auf verschiedenen Seiten passieren, so abgelenkt werden, dass sie im Auge des Beobachters zusammenkommen.<sup>9</sup> Das heißt: Eine Geometrie, die Lichtstrahlen im Vakuum als Geraden verwendet, muss damit leben, dass zwei verschiedene Geraden mehrere Punkte gemeinsam haben, und das ist eine höchst unerwünschte Angelegenheit.

### 5.2 Über Riemanns geometrische Ideen

Die Physik Einsteins fußt auf geometrischen Ideen Bernhard Riemanns. Ich will den kühnen Versuch unternehmen, euch etwas darüber zu erzählen<sup>10</sup>, und ich beschränke mich dabei auf den zweidimensionalen Fall. Für Riemann ist das ein zweifach ausgedehntes Gebilde, eine Mannigfaltigkeit, bei der man zwei Parameter  $p, q$  braucht, um sie zu erfassen. Für genügend kleine Teile davon kann man eine offene Kreisscheibe der euklidischen Ebene als Karte verwenden.

Riemann verlangt, dass man in der Mannigfaltigkeit Längen messen kann, und das soll auf folgende Weise geschehen: Für jeden Punkt  $P$  der Mannigfaltigkeit gibt es einen Satz  $E, F, G$  von Zahlen so, dass das Linienelement  $ds$

---

<sup>9</sup>Leon (Lohse) nannte in dem Zusammenhang das Stichwort „Gravitationslinse“, und das beschreibt die Sache gut: Licht, das ein schwarzes Loch passiert, wird so abgelenkt, als ginge es durch eine Sammellinse.

<sup>10</sup>Dabei stütze ich mich vor allem auf das Buch von Jürgen Jost, siehe Literaturverzeichnis.



in dem Punkt durch

$$(ds)^2 = E(dp)^2 + 2F(dp)(dq) + G(dq)^2$$

bestimmt ist. Diese Zahlen dürfen in vernünftiger Weise von Punkt zu Punkt variieren.

Eigentlich wird durch Riemanns Konstruktion in jedem Punkt der Mannigfaltigkeit eine Tangentialebene angepappt. Anders als in der Gaußschen Arbeit über gekrümmte Flächen ist aber bei Riemann überhaupt keine Rede mehr von einem Raum, in den die Mannigfaltigkeit eingebettet wäre. Schon Gauß unterschied die Innere Geometrie einer Fläche, die von Dingen handelt, die man durch Messungen innerhalb der Fläche untersuchen kann, von der äußeren Geometrie, die mit dem umgebenden Raum zu tun hat. Ein euklidischer Käfer auf einem karierten Blatt kann nicht feststellen, ob sein Blatt, im Raum angeschaut, auf einen großen Zylinder gewickelt ist oder ob es wellblechartig gebogen ist oder ob es wirklich eben ist.

Nun ist noch etwas über Geraden zu sagen. Es seien  $A$  und  $B$  Punkte der Mannigfaltigkeit, und es gebe eine Kurve, die  $A$  mit  $B$  verbindet, also eine vernünftige Abbildung  $c$ , die ein Intervall  $[a, b]$  in die Kreisscheibe, die wir als Karte verwenden, so abbildet, dass die Kartenpunkte  $c(a)$  bzw.  $c(b)$  zu  $A$  bzw.  $B$  gehören. Dann ist die Länge der Kurve durch das Integral

$$\int_a^b \sqrt{E(p'(t))^2 + 2Fp'(t)q'(t) + G(q'(t))^2} dt$$

gegeben.<sup>11</sup> Unter allen Verbindungsstrecken zwischen  $A$  und  $B$  gibt es welche kürzester Länge, so genannte geodätische Linien, und es gibt eine Umgebung von  $A$ , innerhalb derer es zu jedem  $B$  der Umgebung genau eine kürzeste Verbindung gibt. Diese geodätischen Linien übernehmen in der Geometrie Riemanns die Rolle der Geraden. Je nachdem, wie die metrischen Koeffizienten  $E, F, G$  der allgemeinen Riemannschen Geometrie aussehen, handelt es sich um unsere gewöhnliche euklidische Geometrie oder um die Geometrie auf der Oberfläche einer Kugel oder um die Geometrie des hyperbolischen Käfers oder um eine andere. Bei der euklidischen Geometrie ist die Besonderheit, dass es zu je zwei Punkten  $A$  und  $B$  stets genau eine geodätische Linie gibt, die sie verbindet; für jeden Punkt ist die Eindeutigkeitsumgebung immer gleich die ganze Ebene.<sup>12</sup>

### 5.3 Einstein

Was sagt die Physik zu der Riemannschen Geometrie, die unser Universum beschreibt? Da sind wir in der Situation des Käfers, der durch Messungen herausfinden muss, ob in seiner Welt die Geometrie Euklids gilt. Einstein lehrt, dass Masse den Raum krümmt, Euklids Geometrie gilt in der Nähe großer Massen also nicht. Der amerikanische Physiker Richard Feynman gibt in seinem legendären Lehrbuch zwei Beispiele<sup>13</sup>. Sieht man die Erde als Kugel aus homogenem Material an, misst ihre Oberfläche aus und errechnet daraus den Erdradius, sagt Einstein voraus, dass der gemessene Radius größer ist, als er nach Euklid sein sollte, und zwar um, na ja, um 1.5 Millimeter. Bei der Sonne wäre der Radius immerhin einen halben Kilometer zu groß.

<sup>11</sup>Dieses Integral ist freilich leichter allgemein hingeschrieben als im konkreten Fall ausgerechnet, zumal  $E, F$  und  $G$  auch noch von  $p$  und  $q$  abhängen.

<sup>12</sup>Im Januar 2014 besuchte ich mit Paul, Dominik, Joschka und Lucas einen Vortrag an der Uni Paderborn: Professor B. Krötz sprach über gekrümmte Räume. Dieser Vortrag hat die Vorbereitung dieses Mathematischen Samstags heute stark beeinflusst. Was ich hier über geodätische Linien sage und die Aussage, dass die anderen Geometrien Sonderfälle der umfassenden Riemannschen Geometrie sind, stützt sich auf eine Antwortmail von Professor Krötz auf meine Anfrage, die er freundlich und sehr prompt beantwortet hat.

<sup>13</sup>Seite 42-6. Das ganze Kapitel über Gekrümmten Raum ist faszinierend zu lesen.

## 5.4 Schluss

Damit sind wir am Ende unserer Reise durch die Käferwelt bis in die Tiefen des Universums. Wir haben Mathematik gesehen, die von zwei Männern im weltabgeschiedenen Göttingen in Südniedersachsen erdacht wurde und die zum mathematischen Fundament einer neuen physikalischen Weltansicht wurde. Und das alte Problem um Euklids Parallelenlehre erhielt auch gleich eine abschließende Antwort – aber das ist der Anfang einer neuen Geschichte.

## 6 Literatur

1. R. Baldus und F. Löbell, Nichteuklidische Geometrie. Berlin 1964
2. Manfredo P. do Carmo, Differentialgeometrie von Kurven und Flächen. 2. Auflage, Braunschweig/Wiesbaden 1992
3. James Casey, Exploring Curvature. Braunschweig/Wiesbaden 1996
4. The Feynman Lectures on Physics, Vol II. Addison Wesley, Fünfte Auflage 1975
5. A. Filler, Euklidische und Nichteuklidische Geometrie. Mannheim 1993
6. C. F. Gauß, Allgemeine Flächentheorie. Übersetzung A. Wangerins der Disquisitiones generales circa superficies curvas von 1827. Die Übersetzung erschien 1889 in Leipzig. Nachdruck im Teubner-Archiv zur Mathematik, man bekommt den (auch heute noch sehr lesenswerten!) Text leicht im Netz in digitalisierter Form, z.B. bei der Uni-Bibliothek Braunschweig: <http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00049589>
7. Bernhard Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, historisch und mathematisch kommentiert von Jürgen Jost. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg 2013