

Mathematischer Samstag: Brownsche Bewegung

Sebastian Mentemeier

01.06.2013

§ 4. Über die ungeordnete Bewegung von in einer Flüssigkeit suspendierten Teilchen und deren Beziehung zur Diffusion.

Wir gehen nun dazu über, die ungeordneten Bewegungen genauer zu untersuchen, welche, von der Molekularbewegung der Wärme hervorgerufen, Anlaß zu der im letzten Paragraphen untersuchten Diffusion geben.

Es muß offenbar angenommen werden, daß jedes einzelne Teilchen eine Bewegung ausführe, welche unabhängig ist von der Bewegung aller anderen Teilchen; es werden auch die Bewegungen eines und desselben Teilchens in verschiedenen Zeitintervallen als voneinander unabhängige Vorgänge aufzufassen sein, solange wir diese Zeitintervalle nicht zu klein gewählt denken.

Wir führen ein Zeitintervall τ in die Betrachtung ein, welches sehr klein sei gegen die beobachtbaren Zeitintervalle, aber doch so groß, daß die in zwei aufeinanderfolgenden Zeitintervallen τ von einem Teilchen ausgeführten Bewegungen als voneinander unabhängige Ereignisse aufzufassen sind.

Seien nun in einer Flüssigkeit im ganzen n suspendierte Teilchen vorhanden. In einem Zeitintervall τ werden sich die X -Koordinaten der einzelnen Teilchen um Δ vergrößern, wobei Δ für jedes Teilchen einen anderen (positiven oder negativen) Wert hat. Es wird für Δ ein gewisses Häufigkeitsgesetz gelten; die Anzahl dn der Teilchen, welche in dem Zeitintervall τ eine Verschiebung erfahren, welche zwischen Δ und $\Delta + d\Delta$ liegt, wird durch eine Gleichung von der Form

$$dn = n \varphi(\Delta) d\Delta$$

ausdrückbar sein, wobei

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta) d\Delta = 1$$

und φ nur für sehr kleine Werte von Δ von Null verschieden ist und die Bedingung

$$\varphi(\Delta) = \varphi(-\Delta)$$

erfüllt.

558

A. Einstein.

und indem wir

$$\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta^2}{2} \varphi(\Delta) d\Delta = D$$

setzen und nur das erste und dritte Glied der rechten Seite

1 Was erwartet uns?

Vielleicht hast du schon im Physikunterricht gelernt, was es mit “Wärme” auf sich hat - es ist nichts anderes als die Bewegung von Molekülen. Ist Wasser gefroren, so sind die H_2O -Moleküle in einem festen Gitter angeordnet und wackeln nur ein wenig auf ihren Gitterplätzen. Im flüssigen Zustand bewegen sie sich schon relativ frei, und bringen wir das Wasser zum Kochen, so flitzen sie im Wasserdampf wie wild herum - darum braucht die Dampfwolke auch viel mehr Platz als das Wasser vorher. Je höher die Temperatur, desto schneller bewegen sich die Teilchen.

Diese Idee ist plausibel, aber wie kann man sie belegen? Soweit ich weiß, kann selbst ein Elektronenmikroskop nur Festkörper untersuchen, bewegte Teilchen kann man damit nicht “filmen”. Nun, indirekt kann man die Bewegung dieser kleinsten Teilchen nachweisen: Durch nicht ganz so kleine Teilchen. Gibt man zum Beispiel Staubpollen auf einen Tropfen Wasser, so bleiben diese nicht etwa ruhig auf der Oberfläche liegen, sondern führen unregelmäßige Zick-Zack-Bewegungen aus. Da diese Bewegungen unregelmäßig sind, können sie nicht von dem Schwung herrühren, den man den Pollen vielleicht noch mitgegeben hat, zumal sie auch nicht irgendwann aufhören. Vielmehr stoßen die Moleküle andauernd gegen die viel größeren Pollen, und “schubsen” sie dadurch herum. Stell dir eine Kiste vor, in der Tennisbälle wie wild herumflippeln, in alle Richtungen. Legst du nun einen Medizinball dazu, so wird dieser auch anfangen, sich zu bewegen. Langsamer zwar, aber mit häufigen Richtungswechseln. Gäbe es die wild sich bewegenden Tennisbälle nicht, so könnte der Medizinball einfach gemütlich in der Ecke liegen.

Dieses Beispiel macht auch deutlich, dass die Größenverhältnisse eine gewisse Rolle spielen. Wenn du einen Stein ins Wasser legst, wirst du keine Bewegung beobachten. Zwar sind die H_2O -Moleküle auch um den Faktor 10^4 kleiner als ein Staubpollen, aber es sind so unglaublich viele und sie sind so schnell, dass die Häufigkeit der Zusammenstöße dafür sorgt, dass der Staubpollen anfängt, sich zu bewegen.

Dieses Phänomen wurde um 1820 von dem schottischen Botaniker Robert Brown beschrieben, und es trägt ihm zu Ehren den Namen “Brownsche Bewegung”. Er gab damals eine eher mystische Erklärung, indem er vermutete, dass die Pollenteilchen belebt sein. 1863 bewies der deutsche Physiker und Mathematiker Christian Wiener durch Experimente, dass die Pollenbewegung auf die Zusammenstöße mit den Wasserteilchen zurückzuführen ist. Dafür zeigte er u.a., dass keine äußeren Ursachen in Frage kommen können, und dass die Bewegung intensiver wird, wenn man kleinere Teilchen ins Wasser legt – wie etwa einen Fußball anstelle des Medizinballs in das “Tennisballbad”.

Von diesem Wissen ausgehend, machte Einstein sich 1905 daran, die auf den ersten Blick vollkommen willkürlich erscheinende Bewegung der Pollen genauer zu untersuchen. Und tatsächlich gehorcht sie ganz klaren Regeln, den Regeln der Stochastik. Wir können nicht vorhersagen, wohin sich der Pollen bewegt, aber wir können die Wahrscheinlichkeiten dafür angeben, wohin er sich bewegt! Insofern bleibt die Bewegung zufällig, ist aber nicht willkürlich.

Heute wollen wir diese Regeln kennen lernen, die es uns erlauben werden, die Brownsche Bewegung am Computer zu simulieren und mit den Worten der Stochastik einfach zu beschreiben. Diese Regeln hat Einstein in seiner Arbeit formuliert, die ich auszugsweise auf der ersten Seite abgedruckt habe. Am Ende dieses MathSams sollst du sie verstanden haben. Dafür müssen wir zuerst einiges über Stochastik lernen.

Wie man das aus der Mathematik und Physik so kennt, macht man am Anfang immer einige Vereinfachungen, die einem das Leben und Rechnen leichter machen. So schauen wir uns die Brownsche Bewegung hauptsächlich im 1-Dimensionalen an, obwohl die Teilchen sich ja im Raum bewegen. Das ist aber ok, wir schauen uns einfach an, was in Richtung der x -Achse passiert. In Richtung der y - und z -Achse passiert dann das Gleiche.

2 Basics

Das solltest du kennen:

- Die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$
- Ihre Wahrscheinlichkeitsdichte
- Histogramme
- Erwartungswert \mathbb{E} und Varianz \mathbb{V} . Außerdem $\mathbb{E}f(X)$ für integrierbare Funktionen f .
- Skalierungsgesetze für \mathbb{E} , \mathbb{V} .
- Was sind \mathbb{E} und \mathbb{V} der Normalverteilung, wie berechne ich diese?
- Sind X, Y stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, so gilt

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y, \quad \mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}X + \mathbb{V}Y.$$

Für die Normalverteilung gilt noch etwas weitaus Erstaunlicheres:

Satz 1. Sind X, Y stochastisch unabhängig, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ und $Y \sim N(\nu, \eta^2)$, so gilt

$$X + Y \sim N(\mu + \nu, \sigma^2 + \eta^2).$$

Den Beweis können wir hier nicht geben, er geht am schnellsten mit Fouriertransformation, alternativ mit der sog. Faltungsformel.

Dieser Satz ist wirklich erstaunlich – dir ist bestimmt schon einmal die Frage begegnet, wie denn die Wahrscheinlichkeiten verteilt sind, wenn ich die Augenzahlen zweier Würfel addiere? Im Prinzip passiert hier ja das selbe: X und Y sind zwei “normalverteilte Würfel”, deren Ergebnisse ich addiere. Aber im Gegensatz zu den sechsseitigen Würfeln ist hier die Antwort sehr einfach, ich erhalte wieder eine Normalverteilung, deren Erwartungswert und Varianz sich nach den oben besprochenen Regeln richten.

Eine wichtigere Folgerung daraus ist:

Satz 2. Sei $n \geq 1$ beliebig. Sind X_1, \dots, X_n stochastisch unabhängige und identisch $N(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariablen, so gilt

$$\frac{X_1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{X_n}{\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

Diese Eigenschaft heißt *unendlich teilbar*.

Aufgabe 1. Beweise diesen Satz, zumindest für $n = 2$. Für größere n mittels Induktion.

Aufgabe 2. Mache dir diesen Satz mit einer Simulation plausibel: Simuliere jeweils 200 Realisierungen von $N(0, 1)$ -verteilten Zufallsvariablen X_1, X_2 , zeichne die Histogramme und vergleiche diese mit dem Histogramm der Realisierungen von $\frac{X_1}{\sqrt{2}} + \frac{X_2}{\sqrt{2}}$.

Aufgabe 3. Simuliere jeweils 50 Realisierungen von $n = 20$ $B(10, 1/2)$ -verteilten Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n . Was erwartest du für / weißt du über das Histogramm von

1. $X_1 + \dots + X_n$
2. $\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \dots + X_n)$
3. $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$.

Dann zeichne diese Histogramme und überprüfe deine Vermutungen.

Falls du noch Zeit hast, kannst du das Gleiche auch mit anderen (aber immer identisch verteilten!) Zufallsvariablen probieren, oder mal überlegen, was passieren sollte, wenn du andere Vorfaktoren als $\{1, 1/n, 1/\sqrt{n}\}$ wählst?

Aufgabe 4. Kennst du das schwache Gesetz der großen Zahlen, vielleicht sogar dessen Beweis mittels der Tschebyscheff-Ungleichung? Wie passt es zur vorherigen Aufgabe?

3 Der zentrale Grenzwertsatz

Wir besprechen die Ergebnisse von Aufgabe 3. Welche Zusammenhänge zu \mathbb{E} und \mathbb{V} ergeben sich?

Du kennst vielleicht den Satz von de-Moivre-Laplace über die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung. In Aufgabe 3 haben wir gesehen, dass auch andere Verteilungen durch die Normalverteilung approximiert werden können. Tatsächlich ist diese Approximation beliebig genau, wenn n sehr groß wird. Dies ist die Aussage des zentralen Grenzwertsatzes:

Satz 3. Seien X_1, X_2, \dots unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Dann gilt für $S_n = X_1 + \dots + X_n$, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(S_n - n\mu) \sim N(0, \sigma^2).$$

Man kann das Resultat auch analog zu de-Moivre-Laplace formulieren: Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} (S_n - n\mu) \leq t \right) = \Phi(t).$$

Für uns wird noch eine gewisse Verstärkung dieses Resultats wichtig sein, der Satz von Lindeberg für Dreiecksschemata:

Satz 4. *Seien $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Betrachte ein "Dreiecksschema"*

$$((X_k^{(n)})_{k=1}^n)_{n=1}^\infty$$

von Zufallsvariablen. Ist für jedes n $(X_k^{(n)})_{k=1}^n$ eine Kollektion von stochastisch unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 , so gilt für die Folge $S^{(n)} := X_1^{(n)} + \dots + X_n^{(n)}$, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (S^{(n)} - n\mu) \sim N(0, \sigma^2).$$

4 Die Brownsche Bewegung

Aus der Physik kennst du die Beschreibung von Bewegungen durch Angabe von $x(t)$, der Position (hier: auf der x -Achse) zum Zeitpunkt t .

Wie aber beschreibe ich zufällige Bewegungen? Nun, für jeden Zeitpunkt t ist $X(t)$ eine Zufallsvariable! Wie kann ich mir das vorstellen? Nun, wenn ich sehr viele, n , Teilchen unabhängig voneinander der gleichen Situation aussetze, so wird jedes eine verschiedene Bahn nehmen, wenn ich sie aber alle zum Zeitpunkt t fotografiere, so hat ein jedes Teilchen eine unterschiedliche Position $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Diese Positionen sind dann Realisierungen der Zufallsvariable $X(t)$; ich könnte also ein Histogramm zeichnen, und dieses wäre annähernd so, wie es die Verteilung von $X(t)$ vorschreibt.

Auch die Positionsänderungen zwischen den Zeitpunkten t und $t + \tau$, nämlich $X(t + \tau) - X(t)$ sind dann wieder Zufallsvariablen. Ich gebe dir nun die heute übliche Definition der Brownschen Bewegung, und dann wollen wir gemeinsam versuchen, sie aus Einsteins Artikel zu rekonstruieren:

Definition 1. *Eine Kollektion $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$ von Zufallsvariablen heißt Brownsche Bewegung, falls*

1. *für jede Auswahl $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ die Zufallsvariablen $X(t_2) - X(t_1)$, $X(t_3) - X(t_2)$, \dots , $X(t_n) - X(t_{n-1})$ stochastisch unabhängig sind*
2. *für alle $\tau \geq 0$, $t \geq 0$ gilt: $X(t + \tau) - X(t)$ und $X(\tau) - X(0)$ sind identisch verteilt.*
3. *$\mathbb{E}X(t) = 0$, $\mathbb{V}X(t) = t$ für alle $t \geq 0$.*

Für Experten: Es gibt noch eine vierte Eigenschaft, nämlich fast sichere Stetigkeit von Realisierungen $x(t)$, die hat aber keinen Einfluss auf die Ergebnisse, die wir zeigen wollen.

Aufgabe 5. Finde die entsprechenden Passagen in Einsteins Artikel.

Tipp: die Wahrscheinlichkeitsdichte von $X(t + \tau) - X(t)$ für beliebiges t und Zeitintervall τ bezeichnet Einstein mit φ .

4.1 Ein Beweis

Diese Eigenschaften genügen tatsächlich schon, um den Zufallsmechanismus der Brownschen Bewegung eindeutig zu beschreiben.

Satz 5. Sei $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$ eine Brownsche Bewegung. Dann gilt für jedes $t > 0$:

$$X(t) \sim N(0, t).$$

Aufgabe 6. Folgere aus Eigenschaft 3, dass $\mathbb{P}(X(0) = 0) = 1$.

Beweis. Sei $t > 0$ beliebig. Sei $n \geq 1$. Unterteile das Zeitintervall $[0, t]$ in n Intervalle

$$\left[0, \frac{1}{n}t\right], \left[\frac{1}{n}t, \frac{2}{n}t\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}t, t\right]$$

und schreibe $X(t) = X(t) - X(0)$ als Teleskopsumme:

$$\begin{aligned} X(t) &= X(t) - X\left(\frac{n-1}{n}t\right) + X\left(\frac{n-1}{n}t\right) - \dots - X\left(\frac{1}{n}t\right) + X\left(\frac{1}{n}t\right) - X(0) \\ &= \left(X(t) - X\left(\frac{n-1}{n}t\right)\right) + \dots + \left(X\left(\frac{2}{n}t\right) - X\left(\frac{1}{n}t\right)\right) + \left(X\left(\frac{1}{n}t\right) - X(0)\right) \\ &= \left(X\left(\frac{n-1}{n}t + \frac{1}{n}t\right) - X\left(\frac{n-1}{n}t\right)\right) + \dots + \left(X\left(\frac{1}{n}t + \frac{1}{n}t\right) - X\left(\frac{1}{n}t\right)\right) \\ &\quad + \left(X\left(0 + \frac{1}{n}t\right) - X(0)\right) \end{aligned}$$

Schreiben wir der Einfachheit halber $t_k := (k-1)/nt$ sowie $\tau := t/n$ und definieren wir

$$Y_k^{(n)} := X(t_k + \tau) - X(t_k) = X(t_{k+1}) - X(t_k),$$

so haben wir also

$$X(t) = Y_1^{(n)} + \dots + Y_n^{(n)}. \tag{1}$$

Nun sagt uns Eigenschaft (1), dass die Zufallsvariablen Y_1, \dots, Y_n stochastisch unabhängig sind. Eigenschaft (2) liefert, dass die Zufallsvariablen identisch verteilt sind, sie haben nämlich dieselbe Verteilung wie

$$X(\tau) - X(0) = X(\tau).$$

Nach Eigenschaft (3) gilt dann wiederum

$$\mathbb{E}Y_1 = \mathbb{E}X(\tau) = 0$$

sowie

$$\mathbb{V}Y_1 = \mathbb{V}X(\tau) = \tau = \frac{1}{n}t.$$

Wir schreiben noch ein wenig um, und definieren $Z_k^{(n)} := \sqrt{n}Y_k^{(n)}$. Dann ist nach den Regeln für Erwartungswert und Varianz,

$$\mathbb{E}Z_k^{(n)} = \sqrt{n}\mathbb{E}Y_k^{(n)} = 0$$

sowie

$$\mathbb{V}Z_k^{(n)} = n\mathbb{V}Y_k^{(n)} = t.$$

Definieren wir schließlich $S^{(n)} := Z_1^{(n)} + \dots + Z_n^{(n)}$, so gilt für jedes n !

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(Z_1^{(n)} + \dots + Z_n^{(n)} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(S^{(n)} - n \cdot 0 \right). \end{aligned}$$

Da diese Gleichheit für jedes n gilt, bleibt sie auch erhalten, wenn wir den Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ bilden.

Was wir oben nachgerechnet haben, besagt gerade, dass $(Z_k^{(n)})$ ein Dreieckschema bildet, das den Voraussetzungen des Satzes von Lindeberg 4 genügt, und zwar mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = t$. Also gilt für den Grenzwert der rechten Seite, dass er eine $N(0, t)$ -Verteilung hat. Dann muss dies aber auch schon für $X(t)$ gelten. Und das wollten wir zeigen. \square

Das ist schon wirklich erstaunlich. Wir haben im wesentlichen nur angenommen, dass die Positionsänderungen nicht von dem Vorgeschehen abhängen, und nur von der Länge des Zeitintervalls abhängen. Mit Fachbegriffen: Wir haben räumliche und zeitliche Homogenität der Bewegung angenommen. Zusammen mit Eigenschaft (3) konnten wir dadurch die Brownsche Bewegung schon eindeutig beschreiben!

5 Simulation

Wie sieht nun eine Brownsche Bewegung aus? Nun, die Definition gibt einem eine gute Vorschrift, wie man sie simulieren kann: Sagen wir, du willst sie für das Zeitintervall $[0, 1]$ simulieren. Dann unterteile es in gleichgroße Intervalle der Länge $\tau = 1/n$, und lass dir n Realisierungen y_1, \dots, y_n einer $N(0, 1/n)$ -verteilten Zufallsvariablen berechnen. Definiere

$$x(k/n) = y_1 + \dots + y_k,$$

und verbinde die Punkte $x(k/n)$ linear. Der Pfad, den du als Ergebnis erhältst, simuliert dann die Brownsche Bewegung. Das solltest du häufiger machen, um ein Gefühl für die Zufälligkeit zu bekommen.

Aufgabe 7. *Simuliere einige Pfade einer Brownschen Bewegung.*

Eingangs hatten wir uns darauf beschränkt, die Bewegung des Pollen auf der x -Achse zu betrachten – so wie Einstein auch. Wir hatten ebenfalls notiert, dass die Bewegungen auf den weiteren Achsen analog verlaufen. Dabei ist “analog” so zu verstehen, dass die Bewegungen den gleichen stochastischen Gesetzen gehorchen, aber unabhängig voneinander sind. Um eine zweidimensionale Brownsche Bewegung zu simulieren, musst du also zwei eindimensionale Brownsche Bewegungen, $x(t)$ und $y(t)$ simulieren, und der Vektor $(x(t), y(t))$ ist dann eine zweidimensionale Brownsche Bewegung.

Aufgabe 8. *Simuliere eine zweidimensionale Brownsche Bewegung.*

6 Aktienkurse

Die Brownsche Bewegung ist ein gutes Beispiel dafür, wie weitreichend die Anwendungen mathematischer Modelle sind. Ursprünglich in der Botanik entdeckt, diente sie Einstein zur Quantifizierung der Pollenbewegung; seit den 1970er Jahren ist sie Hauptuntersuchungsgegenstand der Finanzmathematik.

Du siehst: Die Frage, wofür dies oder das denn nützlich ist, ist für Mathematiker wirklich schwer zu beantworten. . . . aber nicht, weil es zu wenig Anwendungen gibt, sondern so viele!

Nun wollen wir uns also mit der Finanzmathematik auseinandersetzen. Ich stelle dir gleich ein übliches Modell für den Kurs $S(t)$ einer Aktie vor, und dann wollen wir einmal schauen, wie das mit der Brownschen Bewegung zusammenhängen könnte.

Aktienmodell

1. Die relativen Kursgewinne/-verluste $S(t_1)/S(t_0)$, $S(t_2)/S(t_1)$, . . . sind stochastisch unabhängig.
2. Für jedes $t, \tau > 0$ sind $\log[S(t + \tau)/S(t)]$ und $\log[S(\tau)/S(0)]$ identisch verteilt, und zwar normalverteilt mit Varianz $\sigma^2 \cdot \tau$ für einen festen Wert σ (die Volatilität).
3. Für alle $t \geq 0$ gilt $\mathbb{E}S(t) = 1$.

In diesem Modell bleibt der Aktienkurs im Mittel konstant. Experten ersetzen die dritte Eigenschaft durch $\mathbb{E}S(t) = e^{\mu t}$, dann hat man einen im Mittel steigenden ($\mu > 0$) bzw. fallenden ($\mu < 0$) Aktienkurs.

Aufgabe 9. *Zeige, dass folgende Definition die obigen Eigenschaften erfüllt:*

$$S(t) := e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma X(t)},$$

wobei $X(t)$ die oben eingeführte Brownsche Bewegung ist. Zur Vereinfachung kannst du auch mit $\sigma = 1$ rechnen. Für Experten:

$$S(t) := e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma X(t)}.$$

Aufgabe 10. *Simuliere $S(t)$ mit Hilfe der zuvor simulierten Brownschen Bewegungen.*

Innermathematisch heißt $S(t)$ eine geometrische Brownsche Bewegung. Eigenschaft (3.), die für den erstaunlichen Zusatzterm $\exp(-\frac{\sigma^2}{2})$ gesorgt hat, ist ein Spezialfall der sogenannten Martingaleigenschaft.

7 Das wars...

Ich hoffe, ich konnte dir einen kleinen Einblick in ein noch immer sehr aktives mathematisches Gebiet geben. Du siehst, Mathematik ist ein weites Feld, auf dem es sich lohnt, zu wandern. Manchmal trifft man dabei auch gute Bekannte.

Literatur

- [1] Albert Einstein. *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen.* Annalen der Physik 322(8), Seiten 549-560, 1905.