

Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen, Phasenplots und der Fundamentalsatz der Algebra

P. Kramer und B. Waldmüller

17. April 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen und wie man darin rechnet	3
2.1	Die Trägermenge des Körpers \mathbb{C}	3
2.2	Wie man mit komplexen Zahlen rechnet	3
2.3	Polarkoordinaten	4
2.4	Geometrische Deutung von Addition und Multiplikation	4
2.5	Quadratische Gleichungen	5
2.6	Komplexe Konjugation	6
2.7	Praktische Übungen	6
3	Abbildungen von \mathbb{C} in \mathbb{C}	7
3.1	Die Verschiebung $z \mapsto a + z$	7
3.2	Die Streckung $z \mapsto rz$	7
3.3	Die Drehung $z \mapsto (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \cdot z$	7
3.4	Die Drehstreckung $z \mapsto az$	7
3.5	Die Abbildung $z \mapsto z^n$	8
3.6	Die Abbildung $z \mapsto \frac{1}{z}$	8
4	Phasenplots	9
4.1	Was ist ein Phasenplot?	9
4.2	Nullstellen und Polstellen	9
5	Reelle Gleichungen n-ten Grades und der Fundamentalsatz	11
5.1	Was macht $z \mapsto p(z)$ aus Kreisen um 0?	11
5.1.1	Ein konkretes Beispiel	11
5.1.2	Der allgemeine Fall	14
5.2	Der erste Beweis von Carl Friedrich Gauß	16
5.2.1	Der Apparat	16
5.2.2	Das Argument	18
5.3	Übungen	20
5.4	Wie Gauß den Fundamentalsatz ausspricht	20
5.5	Von der Bedeutung des Fundamentalsatzes	21
6	Literatur	22

1 Einführung

Ob eine Gleichung eine Lösung hat, hängt davon ab, in welchem Zahlenbereich man nach Lösungen sucht. So hat die Gleichung

$$x + 3 = 0$$

keine Lösung, wenn man nur natürliche Zahlen als Lösungen zulässt, in der Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen aber schon. Wenn man die Gleichung

$$3x + 4 = 0$$

lösen will, braucht man die Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen. Die Lösung von

$$x^2 - 2 = 0$$

ist sogar irrational, in \mathbb{Q} hat sie keine Lösung, in der Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen die Lösungen $\pm\sqrt{2}$. In \mathbb{R} wiederum hat die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

keine Lösung, denn das Quadrat einer Zahl $\neq 0$ ist stets positiv. Auch hier gibt es einen Ausweg, man geht von \mathbb{R} zu der größeren Zahlenmenge \mathbb{C} der komplexen Zahlen über. Der Fundamentalsatz der Algebra sagt nun, dass der Prozess damit abgeschlossen ist; jede Gleichung der Form

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

mit $n > 0$ und $a_k \in \mathbb{R}$ für $k = 0, 1, \dots, n-1$ hat eine Lösung in \mathbb{C} .

Unser Ziel ist heute, diese Menge \mathbb{C} kennenzulernen und eine Vorstellung zu bekommen, warum der Fundamentalsatz der Algebra gilt.

2 Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen und wie man darin rechnet

2.1 Die Trägermenge des Körpers \mathbb{C}

Im Jahre 1887 gab der Mathematiker Richard Dedekind eine kleine Schrift mit dem Titel „Was sind und was sollen die Zahlen?“ heraus, in denen er eine saubere Konstruktion der reellen Zahlen versuchte. Es ist ein langer Weg von den natürlichen Zahlen über die rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen, und wollte man die Schüler erst diesen Weg führen, bevor man sie mit reellen Zahlen rechnen lässt, käme man in der Schule nicht weit. Dass $\sqrt{2}$ kein Bruch ist, man aber Strecken konstruieren kann, die Kantenlänge eines Quadrates mit dem Inhalt 2 sind, haben schon im alten Griechenland Mathematiker feststellen müssen – zu ihrem Entsetzen übrigens. Kein Schüler fürchtet sich von $\sqrt{2}$ oder vor π , sondern vertraut auf seinen Taschenrechner, und wir wollen es so ähnlich halten: Wir benutzen eine Gerade als Zahlengerade, und an jedem Punkt dieser Geraden steht eine reelle Zahl, und jede reelle Zahl gehört zu genau einem Punkt der Zahlengeraden, und wie man mit diesen Zahlen rechnet, wissen wir. Und eigentlich machen wir zwischen den Zahlen und ihren Punkten keinen wesentlichen Unterschied. Wir halten diesen Standpunkt fest:

1 Notiz

Die reellen Zahlen sind für uns genau die Punkte der Zahlengeraden.

Glücklicherweise haben wir für die komplexen Zahlen genau so schöne geometrische Objekte, nämlich die Punkte einer Ebene. Wir versehen die Ebene mit einem Koordinatensystem, dann hat jeder Punkt sein Paar von Koordinaten, und schon können wir die Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen hinschreiben.

2 Definition

Zu jedem Punkt der Ebene gehört genau eine komplexe Zahl. Wir bezeichnen die komplexe Zahl, die zu $(x; y)$ gehört, mit $z = x + yi$. Die Koordinate x des Punktes heißt der Realteil $\Re(z)$ von z , die Koordinate y des Punktes der Imaginärteil $\Im(z)$ von z . Formal:

$$\mathbb{C} := \{ x + yi \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

2.2 Wie man mit komplexen Zahlen rechnet

Zahlen haben wir nun, aber wie rechnet man damit? Das ist ganz einfach. Du behandelst das geheimnisvolle i wie eine Variable, eine Unbestimmte, sagt man in der Algebra. Ansonsten verwendest du die gewöhnlichen Rechenregeln für reelle Zahlen, wir nehmen auch die üblichen Rechenzeichen.

3 Notiz

Für komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + y_1i$ und $z_2 = x_2 + y_2i$ ist die Summe

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) := (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i .$$

Nun ahnst du sicher schon, wie man das Produkt $z_1 z_2$ bildet; man multipliziert aus wie üblich. Dabei tritt dann ein Term mit i^2 auf, das Ergebnis soll aber doch wieder eine komplexe Zahl sein. Hier triffst du auf die zentrale Eigenschaft dieses mysteriösen i , es ist nämlich eine Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$, das heißt, es gilt

$$i^2 = -1 . \tag{1}$$

4 Notiz

Für komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + y_1i$ und $z_2 = x_2 + y_2i$ ist das Produkt

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) := (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i .$$

2.3 Polarkoordinaten

In der Regel beschreiben wir die Lage eines Punktes P der Ebene, indem wir seine Koordinaten bezüglich eines gewöhnlichen Koordinatensystems angeben. Es gibt aber noch eine zweite Möglichkeit: wenn wir den Abstand r des Punktes P vom Nullpunkt kennen und den Winkel φ , um den wir die positive x -Achse gegen den Uhrzeigersinn drehen müssen, bis sie durch P geht, ist der Punkt dadurch eindeutig festgelegt. Die Zahlen r und φ nennt man die **Polarkoordinaten** des Punktes P . Es ist sehr leicht, die gewöhnlichen Koordinaten aus den Polarkoordinaten zu berechnen; es gilt nämlich

$$x = r \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad y = r \sin(\varphi) . \quad (2)$$

Hat $z \in \mathbb{C}$ die Polarkoordinaten r und φ , gilt folglich

$$z = r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) . \quad (3)$$

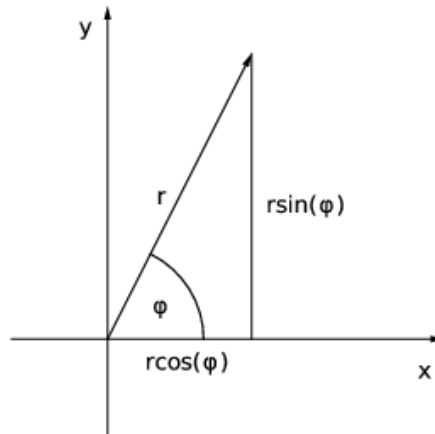


Abbildung 1: Polarkoordinaten eines Punktes (x, y)

2.4 Geometrische Deutung von Addition und Multiplikation

Wenn du bisher nichts von komplexen Zahlen gehört hast, ist vermutlich ein geometrischer Zugang am besten. Soll die Summe zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 gebildet werden, stellst du dir die Pfeile vor, die im Nullpunkt beginnen und in den Punkten z_1 und z_2 enden. Zu $z_1 + z_2$ gehört dann der Pfeil, den du vom Kräfteparallelogramm her als Resultierende kennst – siehe Abbildung 2.

Um das Produkt $z_1 z_2$ zweier komplexer Zahlen anschaulich zu machen, benutzt man am besten Polarkoordinaten. Für $z_1 = r_1 (\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1))$ und $z_2 = r_2 (\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2))$ gilt nämlich:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (4)$$

Man multipliziert die r -Werte und addiert die Winkel, das ist alles! Insbesondere erhalten Potenzen in Polarkoordinaten eine sehr schöne einfache Form:

$$(r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)))^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \quad (5)$$

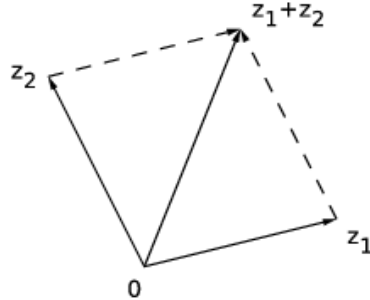


Abbildung 2: Addition komplexer Zahlen

2.5 Quadratische Gleichungen

Es seien p und q reelle Zahlen. Natürlich bist du mit der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0 \quad (6)$$

wohl vertraut. Man löst sie bekanntlich, indem man auf beiden Seiten $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ addiert und die Terme auf der linken Seite zu einem Quadrat zusammenfasst:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

Falls auf der rechten Seite eine positive Zahl oder 0 steht, kannst du rechts die Wurzel ziehen, und es muss

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

sein; das kennst du schon lange. Aber was ist, wenn auf der rechten Seite eine negative Zahl steht? Bisher kanntest du keine Zahl, deren Quadrat negativ ist, jetzt schon. Falls $\frac{p^2}{4} - q < 0$ ist, geht die Gleichung auf, wenn

$$x + \frac{p}{2} = \pm i \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

ist. Lösungen der Gleichung sind dann jedenfalls

$$x = -\frac{p}{2} \pm i \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} .$$

Dass diese Zahlen in \mathbb{C} die einzigen Lösungen der Gleichung sind, kann man zum Beispiel mit Hilfe von Polynomdivision zeigen; die funktioniert ja auch in \mathbb{C} .

5 Notiz

Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ ist in \mathbb{C} immer lösbar. Die Lösungen sind in etwas nachlässiger Schreibweise

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} .$$

2.6 Komplexe Konjugation

Wenn eine quadratische Gleichung komplexe Lösungen hat, liegen diese immer, wie wir gesehen haben, symmetrisch zur reellen Achse. In der Tat besteht zwischen komplexen Zahlen, die symmetrisch zur reellen Achse liegen, eine enge Verwandtschaft. Das Spiegelbild einer Zahl $z \in \mathbb{C}$ bezeichnet man mit \bar{z} und nennt die Zahl \bar{z} die zu z konjugierte komplexe Zahl. Die Abbildung $\bar{\cdot} : z \mapsto \bar{z}$ hat interessante Eigenschaften.

6 Notiz

Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ und es sei $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

1. $\overline{x + yi} = x - yi$
2. $\bar{z} = z$ gilt dann und nur dann, wenn $\Im(z) = 0$, also wenn $z \in \mathbb{R}$ ist.
3. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
4. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

Du sollst sogleich eine Anwendung sehen:

7 Lemma

Es sei

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

eine Gleichung in der Variablen x mit reellen Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_{n-1} und es sei $z \in \mathbb{C}$ eine Lösung dieser Gleichung. Dann ist auch \bar{z} eine Lösung der Gleichung.

Beweis. Aus $p(z) = 0$ folgt sofort $\overline{p(z)} = 0$. Wir benutzen nun die Eigenschaften der komplexen Konjugation:

$$\begin{aligned} \overline{p(z)} &= \overline{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0} \\ &= \overline{z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \dots + \overline{a_0} \\ &= \bar{z}^n + \overline{a_{n-1}} \cdot \bar{z}^{n-1} + \dots + \overline{a_1} \cdot \bar{z} + \overline{a_0} \\ &= \bar{z}^n + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + \dots + a_1\bar{z} + a_0 \\ &= p(\bar{z}) \end{aligned}$$

2.7 Praktische Übungen

Es sei $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$ und $z_3 = -2 + i$.

1. Bilde $z_1 + z_2$, $z_1 + z_3$ und $z_2 + z_3$.
2. Zeichne ein Koordinatensystem, trage z_1, z_2, z_3 und die berechneten Summen ein.
3. Multipliziere z_1, z_2, z_3 jeweils mit 2 und mit $\frac{1}{2}$ und zeichne wieder. Nimm ein neues Koordinatensystem!
4. Multipliziere z_1, z_2, z_3 jeweils mit i und zeichne wieder. Nimm ein neues Koordinatensystem!
5. Es sei $z = x + yi$. Was mag $\frac{z}{r}$ sein für eine reelle Zahl $r \neq 0$?
6. Es sei $z = x + yi$. Was mag dann $\frac{1}{z}$ sein? Hinweis: Schreibe $\frac{1}{z}$ einfach hin und erweitere den Bruch mit $x - yi$.

7. Auch in \mathbb{C} darf man nicht durch 0 teilen. Aber darf der Realteil 0 sein oder der Imaginärteil?
8. Löse die Gleichung $x^2 + 6x + 13 = 0$.

Sicher hast du einige Entdeckungen gemacht. Der Vollständigkeit halber notiere ich einige Ergebnisse.

8 Notiz

Es sei $z_k = x_k + y_k i$ für $k = 1, 2$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

1. Der Nullpunkt und die Punkte z_1 , $z_1 + z_2$ und z_2 sind die Ecken eines Parallelogramms.
2. Multiplikation mit einer reellen Zahl $r \neq 0$ bewirkt eine zentrische Streckung der Ebene mit Streckzentrum $(0; 0)$ und Streckfaktor r .
3. Es ist

$$\frac{1}{x + yi} = \frac{1 - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i,$$

jede komplexe Zahl $z \neq 0 = 0 + 0i$ hat also einen „Kehrwert“.

3 Abbildungen von \mathbb{C} in \mathbb{C}

Eine Abbildung f von \mathbb{C} in \mathbb{C} ordnet jedem $z \in \mathbb{C}$ je genau ein $f(z) \in \mathbb{C}$ zu; Abbildung ist eigentlich nur ein anderes Wort für Funktion. Eine solche Abbildung und ihre geometrische Deutung hast du schon kennengelernt: die komplexe Konjugation. Wir diskutieren ein paar einfache Beispiele solcher Abbildungen.

3.1 Die Verschiebung $z \mapsto a + z$

Es sei $a \in \mathbb{C}$ eine feste Zahl. Dann ist durch $f : z \mapsto z + a$ die Abbildung gegeben, die zu jedem $z \in \mathbb{C}$ die feste Zahl $a \in \mathbb{C}$ addiert. Geometrisch handelt es sich um die Verschiebung der Ebene, die durch den Pfeil beschrieben wird, der im Nullpunkt beginnt und in a endet.

3.2 Die Streckung $z \mapsto rz$

Es sei $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Dann ist durch $z \mapsto rz$ eine Abbildung von \mathbb{C} in \mathbb{C} gegeben. Geometrisch handelt es sich um eine zentrische Streckung der Ebene; Streckzentrum ist der Nullpunkt, Streckfaktor r .

3.3 Die Drehung $z \mapsto (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \cdot z$

Es sei $\gamma \in \mathbb{R}$. Dann ist $c := \cos(\gamma) + i \sin(\gamma)$ ein Punkt auf dem Einheitskreis, denn der Abstand von c zum Nullpunkt ist 1. Es sei $z \in \mathbb{C}$. Wir definieren die Abbildung f durch $f(z) = cz$. Wenn z die Polarkoordinaten r und φ hat, hat $f(z) = cz$ die Polarkoordinaten r und $\varphi + \gamma$. Folglich handelt es sich bei f geometrisch um die Drehung der Ebene um den Nullpunkt um den Winkel γ gegen den Uhrzeigersinn.

3.4 Die Drehstreckung $z \mapsto az$

Es sei $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, und die Polarkoordinaten von a seien r und α . Die Abbildung $z \mapsto az$ von \mathbb{C} in \mathbb{C} dreht die Ebene um den Nullpunkt gegen den Uhrzeigersinn um den Winkel α und streckt sie anschließend mit dem Streckfaktor r . Das Streckzentrum ist wieder der Nullpunkt. Folglich handelt es sich bei der Abbildung um eine Drehstreckung.

3.5 Die Abbildung $z \mapsto z^n$

Es sei $f : z \mapsto z^n$. Wir verwenden gleich geometrische Begriffe. Jeder Punkt auf dem Kreis um 0 mit dem Radius r wird auf einen Punkt auf dem Kreis um 0 mit dem Radius r^n abgebildet. Wenn z den Kreis um 0 mit dem Radius r gegen den Uhrzeigersinn einmal durchläuft, durchläuft z^n den Bildkreis gleich n -mal. Damit ist die geometrische Wirkung der Abbildung klar, es handelt sich nicht um etwas, was wir schon von früher her kennen.

3.6 Die Abbildung $z \mapsto \frac{1}{z}$

Wenn z die Polarkoordinaten r und φ hat, hat $\frac{1}{z}$ die Polarkoordinaten $\frac{1}{r}$ und $-\varphi$. Für $z = 0$ ist die Funktion nicht definiert. Jedes $z \neq 0$ legt den Strahl durch z fest, der in 0 beginnt. Auf diesem Strahl liegt genau ein Punkt, der vom Nullpunkt den Abstand $\frac{1}{r}$ hat. Diesen Punkt sucht man auf und spiegelt ihn noch an der reellen Achse, dann hat man den Bildpunkt. Interessant bei dieser Abbildung ist, dass sie das Innere des Einheitskreises außer 0 mit dem Äußeren vertauscht.

4 Phasenplots

Bei der Untersuchung von Funktionen einer reellen Variablen ist es sehr hilfreich, den Graphen der Funktion zu kennen. Viele Eigenschaften der dargestellten Funktion sind auf den ersten Blick erkennbar. Wollen wir Funktionen $f : z \in \mathbb{C} \mapsto w \in \mathbb{C}$ auf gleiche Weise darstellen, muss der Graph den Real- und den Imaginärteil von z und von $f(z)$ enthalten, also vier Dimensionen. Solch einen vierdimensionalen Graphen können wir nicht erstellen. Das Phasenplot schafft aber eine Möglichkeit, manche Eigenschaften einer Funktion von \mathbb{C} in \mathbb{C} auch direkt „abzulesen“.

4.1 Was ist ein Phasenplot?

In Polarkoordinaten wird eine komplexe Zahl z durch ihre Phase $\frac{z}{|z|}$ bzw. ihr Argument $\varphi = \arg(z)$ und einen Betrag $|z|$ dargestellt. Das Phasenplot enthält nur Informationen über die Phasen der Funktionswerte der betrachteten Funktion, der Betrag wird nicht beachtet.

Um ein Phasenplot zu erstellen, ordnen wir als erstes jeder komplexen Zahl eine von ihrer Phase abhängige Farbe zu. Zahlen, die auf dem gleichen vom Ursprung ausgehenden Strahl liegen, haben die gleiche Farbe. Also reicht es, wenn wir z.B. den Einheitskreis färben. Unsere Färbung der Zahlenebene sieht man in Abbildung 3 auf Seite 10.

Das Phasenplot einer Funktion $f(z)$ erstellen wir nun, indem wir jeder Zahl ihres Definitionsgebiets die Farbe des jeweiligen Funktionswertes zuordnen. Der Punkt, der der Zahl z_0 entspricht, bekommt also die Farbe, die wir im ersten Schritt $f(z_0)$ zugeordnet haben.

Beispiel 1: $f(z) = z$

Da jeder Punkt auf sich selbst abgebildet wird, erhält er die Farbe, die ihm zugewiesen wurde. Man erhält also wieder die vorher festgelegte Färbung der Ebene wie in Abbildung 3.

Beispiel 2: $f(z) = z^n$ mit ganzem n

Da die Funktion f eine Abbildung von \mathbb{C} in \mathbb{C} ist, kann man sich zwei Zahlenebenen vorstellen, so dass jedem Punkt der z -Ebene ein Bildpunkt in der Bildebene entspricht. Wir schauen uns nun einen Punkt an, der in der z -Ebene einen Kreis K um den Ursprung einmal umläuft. Der Bildpunkt von $z = re^{i(\varphi+\alpha)}$ ist

$$f(z) = r^n \left(e^{i(\varphi+\alpha)} \right)^n = r^n e^{i(n\varphi+n\alpha)} .$$

Wenn der Punkt den Kreis einmal durchläuft, macht der Bildpunkt n Umdrehungen, das Phasenplot muss dann auf K alle Farben n mal enthalten. Ist n positiv, bleibt die Reihenfolge der Farben erhalten, bei negativem n werden die Farben in umgekehrter Richtung durchlaufen.

Der Term $f(re^{i\varphi}) = r^n e^{i(n\varphi)}$ zeigt weiter, dass die Phase des Bildpunktes nicht vom Betrag des Ausgangspunktes abhängt, folglich also die Farbe auf vom Ursprung ausgehenden Strahlen gleich ist. Abbildung 4 zeigt das am Beispiel der Funktion $f(z) = z^5$.

4.2 Nullstellen und Polstellen

Da die Phasen von null und unendlich nicht definiert sind, werden wir das Phasenplot an diesen Stellen weiter untersuchen. Ein Polynom $f(z)$, das an der Stelle z_0

eine n -fache Nullstelle hat, kann man als

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z)$$

darstellen, wobei $g(z)$ wieder ein Polynom ist und bei z_0 keine Nullstelle hat. Das Phasenplot von $(z - z_0)^n$ sieht bei z_0 aus wie z^n bei null, und die Multiplikation mit $g(z)$ erzeugt nahe z_0 nur eine Drehstreckung. In der Nähe einer n -fachen Nullstelle sieht ein Polynom also aus wie z^n um $\arg(g(z_0))$ gedreht. Man kann damit nicht nur die Lage, sondern auch die Vielfachheit von Null- und Polstellen erkennen.



Abbildung 3: Nach unserer Methode eingefärbte Zahlenebene. $z = 0$ liegt genau in der Mitte.

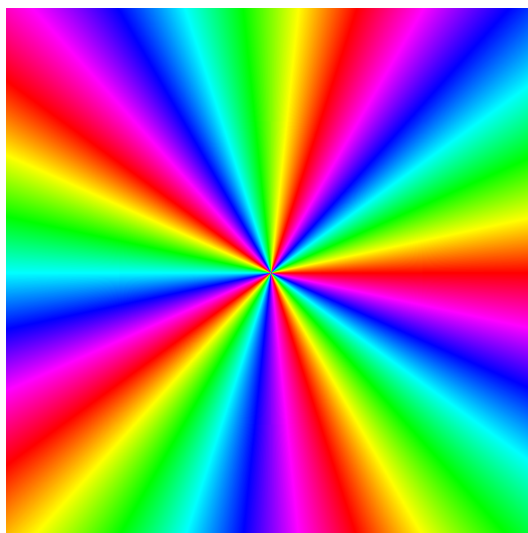


Abbildung 4: Das Phasenplot von $f(z) = z^5$ im Quadrat um 0 mit Seitenlänge 4.

5 Reelle Gleichungen n -ten Grades und der Fundamentalsatz

Von je her haben sich Mathematiker mit dem Lösen von Gleichungen beschäftigt, und dabei waren Gleichungen dieses Typs von besonderem Interesse:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (7)$$

mit reellen Vorfaktoren $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$. Nach dem größten auftretenden Exponenten n von x nennt man sie Gleichungen n -ten Grades. Setzt du $n = 1$, hast du eine lineare Gleichung, und die kannst du schon lange allgemein lösen. Für $n = 2$ ist es genau die quadratische Gleichung, auf die die pq -Formel passt. Lange hat man versucht, Lösungsformeln für Gleichungen höheren Grades zu finden, und für die Fälle $n = 3$ und $n = 4$ war man sogar erfolgreich; die Lösungsformeln sind aber sperrige Ungetüme, die für die Praxis kaum taugen. Für $n \geq 5$ jedoch gibt es keine allgemeine Lösungsformel mehr, das wird in der Algebra bewiesen.

Du weißt bestimmt, dass die Gleichung n -ten Grades in (7) höchstens n Lösungen haben kann, dass sie für ungerades n mindestens eine Lösung haben muss und dass sie bei geradem n auch schon einmal überhaupt keine Lösung hat, wie das Beispiel $x^2 + 1 = 0$ zeigt. Wie wurden diese Erkenntnisse gewonnen? Durch einen Paradigmenwechsel: Man fasst die linke Seite der Gleichung (7) als Term $p(x)$ einer Funktion p auf. Für ungerades n weiß man dann, dass $p(x)$ positiv ist, wenn man für x sehr große positive Werte einsetzt, und negativ, wenn man (betragsmäßig) sehr große negative Werte einsetzt. Folglich muss der Graph der Funktion p die x -Achse wenigstens einmal schneiden, und deshalb hat die Gleichung (7) für ungerades n mindestens eine Lösung.

Diesen Ansatz, die Funktion zu untersuchen, deren Term durch die linke Seite der Gleichung gegeben ist, verfolgen wir nun weiter, aber wir setzen für x auch komplexe Zahlen ein. Die Funktion

$$p : z \mapsto z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_2z^2 + a_1z + a_0 \quad (8)$$

ordnet jeder Zahl $z \in \mathbb{C}$ eine Zahl $p(z) \in \mathbb{C}$ zu, und diese Funktion wollen wir nun studieren. Unser Ziel ist, einzusehen, dass es für $n > 0$ stets mindestens ein $z_0 \in \mathbb{C}$ gibt, für das $p(z_0) = 0$ ist; dieses z_0 ist dann Lösung von (7).

5.1 Was macht $z \mapsto p(z)$ aus Kreisen um 0?

Das erste Problem, auf das wir bei der komplexen Funktion p stoßen, ist, dass wir von p keinen Graphen in einem xy -System zeichnen können, wie wir es gewohnt sind. Für den Definitionsbereich \mathbb{C} , in dem das z lebt, brauchen wir schon die ganze Ebene, mit der wir bisher auskamen, und für den Wertebereich, in dem die $p(z)$ leben, eine zweite. Die erste Ebene nennen wir die z -Ebene, die zweite die w -Ebene.

Nach diesen Vorbereitungen stellen wir uns die Frage, was $p(z)$ in der w -Ebene macht, wenn z in der z -Ebene einen Kreis vom Radius r um 0 durchläuft. Es ist klar, dass $p(z)$ eine geschlossene Kurve durchlaufen muss, deren Form allerdings stark von r abhängt. Bevor wir an eine allgemeine Untersuchung gehen, schauen wir uns ein konkretes Beispiel an.

5.1.1 Ein konkretes Beispiel

Wir betrachten die Gleichung $x^3 + x^2 - 2 = 0$; dass man die Lösung $x = 1$ sofort erkennt, tut nichts zur Sache. Die linke Seite der Gleichung liefert die Funktion

$$p : z \mapsto z^3 + z^2 - 2$$

von \mathbb{C} in \mathbb{C} . Lässt man in

$$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

bei festem r das φ von 0 bis 2π laufen, beschreibt das $z = z(\varphi)$ in der z -Ebene einen Kreis vom Radius r um den Nullpunkt. Wie gesagt, beschreibt der zugehörige Punkt $p(z(\varphi))$ eine geschlossene Kurve in der w -Ebene. Abbildung 5 zeigt solche Kurven für einige Werte von r . Beachte die Skalierung der Achsen!

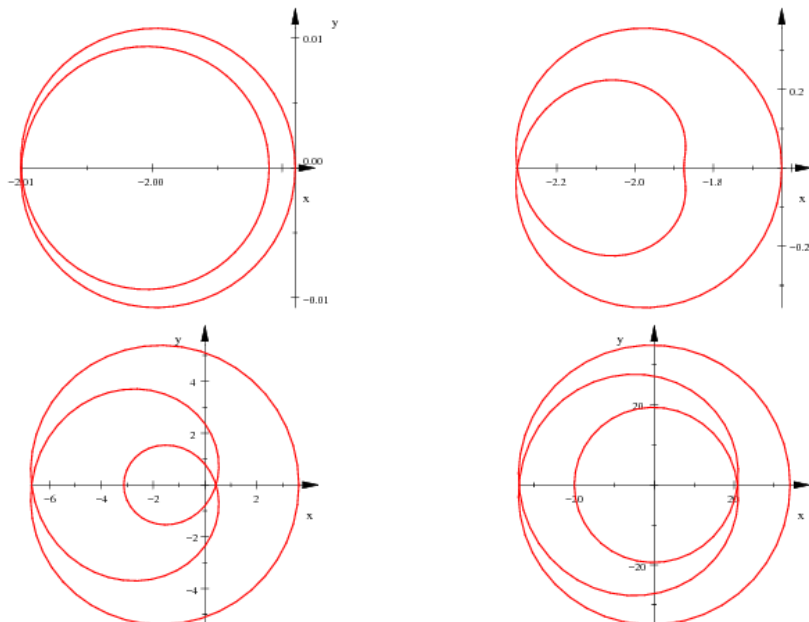


Abbildung 5: Bilder der Kreise um 0 mit den Radien $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ und 3 unter der Funktion $p : z \mapsto z^3 + z^2 - 2$

Ganz einfach liegen die Dinge offensichtlich nicht. Schauen wir uns $p(z(\varphi))$ genauer an:

$$w(\varphi) = p(z(\varphi)) = z(\varphi)^3 + z(\varphi)^2 - 2$$

Nun ist

$$z(\varphi)^k = (r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)))^k = r^k (\cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi)) \quad ,$$

und wenn φ von 0 bis 2π läuft, läuft $z(\varphi)^k$ in der w -Ebene k -mal auf dem Kreis mit dem Radius r^k um den Nullpunkt.

Nehmen wir einmal an, r sei groß. Dann ist r^3 größer als r^2 , und wir teilen $w(\varphi) = p(z(\varphi))$ so auf:

$$w(\varphi) = p(z(\varphi)) = (-2 + z(\varphi)^3) + z(\varphi)^2$$

Dann können wir uns die Bewegung von $w(\varphi)$ so vorstellen: Ein Punkt w_1 bewegt sich auf der durch

$$w_1(\varphi) = -2 + z(\varphi)^3$$

gegebenen Bahn, das ist ein Kreis um den Punkt -2 mit dem Radius r^3 . Dabei bewegt sich ein zweiter Punkt w_2 auf einer Kreisbahn mit dem Radius r^2 um w_1 . Die Bahn des zweiten Punktes $w_2(\varphi)$ ist die Bahn von $w(\varphi)$. Das Ganze sieht aus

wie ein Planetensystem: Die Sonne ist in -2 , die Erde ist $w_1(\varphi)$, der Mond ist $w_2(\varphi)$.¹

Für $r \geq 10$ ist $r^2 \leq \frac{1}{10}r^3$, und es gilt

$$|w(\varphi) - w_1(\varphi)| = |r^2 (\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi))| = r^2 \leq \frac{1}{10}r^3 .$$

Die Bahn von $w(\varphi)$ liegt folglich ganz in dem Kreisring zwischen den Kreisen um -2 mit den Radien $\frac{9}{10}r^3$ und $\frac{11}{10}r^3$. Umgekehrt liegt für $r \leq \frac{1}{10}$ die Bahn von $w(\varphi)$ ganz in dem Kreisring zwischen den Kreisen um -2 mit den Radien $\frac{9}{10}r^2$ und $\frac{11}{10}r^2$. Die beiden Fälle sind in Abbildung 6 dargestellt, die Bahnkurven von $w(\varphi)$ sind rot, die Randkreise als schwarze unterbrochene Linien dargestellt.

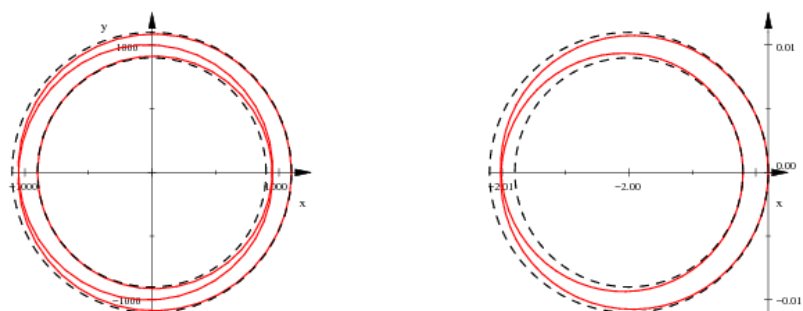


Abbildung 6: Bilder der Kreise um 0 mit den Radien 10 und $\frac{1}{10}$ unter der Funktion $p : z \mapsto z^3 + z^2 - 2$

Was sagt das nun über die Existenz von Lösungen der Gleichung $p(x) = 0$? Nun, der Nullpunkt der w -Ebene liegt sicher außerhalb des Kreises um -2 mit dem Radius $\frac{1}{10}$, das ist der äußere Kreis des Kreisrings zu $r = \frac{1}{10}$. Ferner liegt der Nullpunkt ganz sicher innerhalb der Kreises um -2 mit dem Radius $\frac{9}{10} \cdot 10^3$, das ist der innere Kreis des Kreisrings zu $r = 10$. Wenn r von $\frac{1}{10}$ auf 10 wächst, wird die Bahnkurve von $w(\varphi)$ deformiert, und dabei bleibt sie stets eine geschlossene Kurve. Anfangs verläuft sie innerhalb des kleinen Kreises, zum Schluss außerhalb des großen Kreises. Der Nullpunkt liegt zwischen den beiden Kreisen, die Bahnkurve sollte den Nullpunkt folglich mindestens einmal überstreichen, wenn r von $\frac{1}{10}$ auf 10 wächst.

Überzeugt dich dieses Argument? Eine Folgerung daraus ist, dass es mindestens ein r zwischen $\frac{1}{10}$ und 10 und mindestens ein φ zwischen 0 und 2π so gibt, dass $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ von p auf den Nullpunkt abgebildet wird, also Lösung der Gleichung $p(z) = 0$ ist, und dann ist die Aussage des Fundamentalsatzes erfüllt.

Man kann die Sache noch von einer anderen Seite betrachten. Wir halten $\varphi = 0$ fest und lassen r von $\frac{1}{10}$ bis 10 laufen. Dann durchläuft $p(z)$ eine Kurve in der w -Ebene, bei $\varphi = 0$ ist das sogar eine Strecke. Der Anfangspunkt liegt im inneren Kreisring, der Endpunkt im äußeren Kreisring. Die Situation ist in Abbildung 7 dargestellt, der kleine Kreisring ist nicht zu erkennen.

Lässt man jetzt φ von 0 bis 2π laufen, bewegt sich die Kurve stetig, bis sie schließlich wieder in der Anfangslage ist. Während der Bewegung bleibt der Anfangspunkt im inneren und der Endpunkt im äußeren Kreisring. Muss die Kurve

¹In der Antike hat man tatsächlich zur Beschreibung der Bewegung von Himmelskörpern Kreise benutzt, deren Mittelpunkte Kreisbahnen beschrieben; man sprach von Epizykeln.

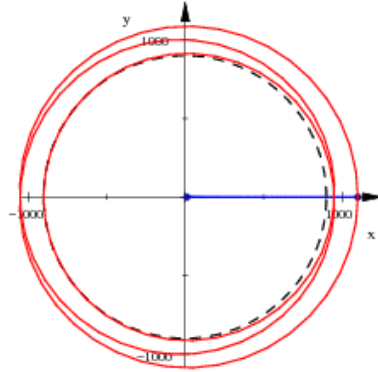


Abbildung 7: Bild der Strecke zwischen $(\frac{1}{10}, 0)$ und $(10, 0)$ unter der Funktion $p : z \mapsto z^3 + z^2 - 2$

dann nicht auch den Nullpunkt mindestens einmal überstreichen, der doch im Gebiet zwischen den beiden Kreisringen liegt? Auch dies begründete wieder die Existenz einer Nullstelle von $p(x)$.

5.1.2 Der allgemeine Fall

Die Argumentation, die plausibel machte, dass die konkrete Gleichung $x^3 + x^2 - 2 = 0$ in \mathbb{C} eine Lösung haben muss, lässt sich gut auf den allgemeinen Fall der Gleichung (7) übertragen. Wir haben es dann mit der Funktion

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_2z^2 + a_1z + a_0 \quad (9)$$

zu tun. Wir schreiben z wieder in der Form $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$. Wenn wir r festhalten und φ von 0 bis 2π laufen lassen, durchläuft z^n n -mal den Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius r^n . Wir schätzen ab, wie weit $p(z)$ von z^n entfernt sein kann. Dazu brauchen wir zwei Eigenschaften des Betrages einer komplexen Zahl:

9 Lemma

Für alle $a, b \in \mathbb{C}$ gilt $|ab| = |a| \cdot |b|$ und $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Die erste Eigenschaft sieht man leicht ein, wenn man a und b mit r und φ schreibt, die zweite, die so genannte Dreiecksungleichung, wenn man kartesische Koordinaten verwendet.

Nun haben wir das passende Werkzeug zur Hand. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} |p(z) - z^n| &= |a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_2z^2 + a_1z + a_0| \\ &\leq |a_{n-1}z^{n-1}| + |a_{n-2}z^{n-2}| + \dots + |a_2z^2| + |a_1z| + |a_0| \\ &= |a_{n-1}| \cdot |z^{n-1}| + |a_{n-2}| \cdot |z^{n-2}| + \dots + |a_2| \cdot |z^2| + |a_1| \cdot |z| + |a_0| \\ &= |a_{n-1}| \cdot |r^{n-1}| + |a_{n-2}| \cdot |r^{n-2}| + \dots + |a_2| \cdot |r^2| + |a_1| \cdot |r| + |a_0| \\ &\leq r^{n-1}(|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_2| + |a_1| + |a_0|) \quad \text{für } r \geq 1 \end{aligned}$$

Mit der Abkürzung $M := |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_2| + |a_1| + |a_0|$ können wir das Ergebnis kurz so formulieren:

$$|p(z) - z^n| \leq Mr^{n-1} \quad \text{für } r \geq 1 \quad (10)$$

Damit sind wir fast am Ziel. Wenn wir wollen, dass das Bild des Kreises um den Nullpunkt mit dem Radius r in der w -Ebene außerhalb des Kreises um den Nullpunkt mit dem Radius $\frac{9}{10}r^n$ liegen soll, müssen wir r nur größer als $10M$ machen, denn dann ist

$$|p(z) - z^n| \leq Mr^{n-1} = \frac{M}{r} \cdot r^n < \frac{M}{10M} \cdot r^n = \frac{1}{10}r^n .$$

Man kann für sehr kleine r eine entsprechende Überlegung anstellen. Ich kürze dies hier ab und greife zu einem Stetigkeitsargument: Es ist $p(0) = a_0$. Für $a_0 = 0$ ist $z = 0$ Lösung der Gleichung 7, es sei also $a_0 \neq 0$. Dann liegt für alle z einer genügend kleinen Kreisscheibe um 0 das $p(z)$ in der Kreisscheibe um a_0 mit dem Radius $\frac{1}{2}|a_0|$, und der Nullpunkt liegt außerhalb dieser Kreisscheibe.

Wir können nun genau so argumentieren wie im konkreten Beispiel. Das Bild eines genügend kleinen Kreises um den Nullpunkt unter p ist eine geschlossene Kurve, die ganz in einer Kreisscheibe liegt, die den Nullpunkt nicht enthält. Lässt man r genügend groß werden, liegt das Bild des Kreises ganz außerhalb eines Kreises um den Nullpunkt, und beim Anwachsen des Kreises in der z -Ebene bleibt das Bild in der w -Ebene stets eine geschlossene Kurve; sie sollte folglich den Nullpunkt im Laufe dieses Prozesses mindestens einmal überstreichen. Damit hätte $p(z) = 0$ mindestens eine Lösung in \mathbb{C} . Für jemanden, der die Argumentation akzeptiert, ist damit der Fundamentalsatz bewiesen. – Die MuPAD-Dateien `kreisbilder.mn` und `homotopie.mn` bieten dir die Möglichkeit, die Argumentation an konkreten Funktionen durchzuspielen.

5.2 Der erste Beweis von Carl Friedrich Gauß

5.2.1 Der Apparat

Im Jahre 1797 entdeckte² der junge Carl Friedrich Gauß einen neuartigen Beweis des Fundamentalsatzes. Gerade zwanzig war er da, also etwa so alt wie ihr. Die Grundidee ist faszinierend, und die möchte ich mit euch anschauen.

Die Gleichung $p(x) = 0$, die Funktion $p : z \mapsto p(z)$, die Darstellung $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$, die Abkürzung M für die Summe der Absolutbeträge der a_k in $p(x)$ seien wie in der Herleitung der Ungleichung

$$|p(z) - z^n| \leq Mr^{n-1}$$

unter der Nummer (10) auf der Seite 14. Die Abbildung 8 veranschaulicht die Situation. Lassen wir wieder für ein festes $r \geq 1$ das φ von 0 bis 2π laufen, durchläuft der Punkt z^n in der w -Ebene n -mal den Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius r^n . Punkt und Bahn sind blau dargestellt. Der Punkt $p(z)$ liegt dann in der Kreisscheibe um z^n mit dem Radius Mr^{n-1} , das ist der kleine rote Kreis. Die gestrichelten schwarzen Geraden sind die Winkelhalbierenden, sie teilen die w -Ebene in vier Sektoren ein. Wir bezeichnen die Sektoren gegen den Uhrzeigersinn mit den Nummern 1 bis 4, beginnend mit dem Sektor, der die positive x -Achse enthält.

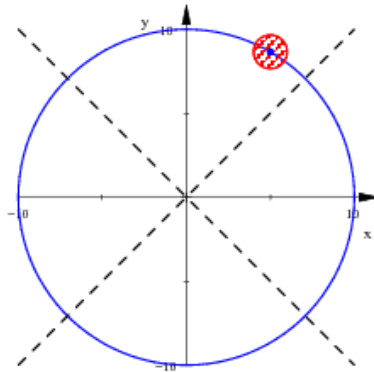


Abbildung 8: Bild der w -Ebene

Das r soll so groß sein, dass der Realteil von $p(z)$ positiv ist, solange z^n im ersten Sektor liegt. Das ist gegeben, wenn der Radius des roten Kreises kleiner als $\frac{1}{2}\sqrt{2}r^n$ ist:

$$Mr^{n-1} < \frac{1}{2}\sqrt{2}r^n \iff \frac{2M}{\sqrt{2}} < r$$

Es sei also $r > \frac{2M}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}M$. Dann ist der Realteil von $p(z)$ positiv, wenn z^n im Sektor 1 ist, und negativ, wenn z^n im Sektor 3 liegt. Folglich muss der Realteil von $p(z)$ jeweils mindestens einmal 0 werden, wenn z^n in Sektor 2 und wenn z^n in Sektor 4 ist.

Wir schreiben den Realteil von $p(z)$ hin

$$\Re(p(z)) = r^n \cos(n\varphi) + a_{n-1}r^{n-1} \cos((n-1)\varphi) + \cdots + a_1r \cos(\varphi) + a_0$$

²Hat er den Beweis entdeckt oder hat er sich den Beweis ausgedacht und dieses Stück Mathematik dadurch quasi erschaffen? Ewige Grundfrage nach dem Wesen der Mathematik! Nun, Gauß selbst schrieb, er habe den Beweis entdeckt.

und leiten ihn nach φ ab:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \Re(p(z)) = -nr^n \sin(n\varphi) - (n-1)a_{n-1}r^{n-1} \sin((n-1)\varphi) + \dots - a_1 r \sin(\varphi)$$

Wenn z^n in Sektor 2 ist, ist $\sin(n\varphi) > \frac{1}{2}\sqrt{2}$, der erste Summand ist also kleiner als $-nr^n \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und somit negativ. Die Summe der restlichen Summanden kann daran nichts mehr ändern, denn es gilt:

$$\begin{aligned} & |(n-1)a_{n-1}r^{n-1} \sin((n-1)\varphi) + \dots + a_1 r \sin(\varphi)| \\ & \leq (n-1)r^{n-1}|a_{n-1}| \cdot 1 + (n-2)r^{n-2}|a_{n-2}| \cdot 1 + \dots + r|a_1| \cdot 1 \\ & \leq (n-1)r^{n-1}M \\ & = (n-1)\frac{M}{r}r^n \\ & < (n-1)\frac{1}{2}\sqrt{2}r^n \\ & < n\frac{1}{2}\sqrt{2}r^n \end{aligned}$$

Da die Ableitung des Realteils nach φ für die z^n in Sektor 2 negativ ist, wird dieser Realteil nur jeweils genau einmal 0, wenn z^n den Sektor 2 durchläuft. Entsprechendes gilt für z^n in Sektor 4.

Nun durchläuft z^n den Kreis in Abbildung 8 n -mal, wenn φ von 0 bis 2π läuft. Folglich liegen in der z -Ebene auf jedem Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $r > \frac{2M}{\sqrt{2}}$ genau $2n$ Punkte, für die der Realteil $\Re(p(z)) = 0$ ist. Diese Punkte bilden außerhalb des Kreises um 0 mit dem Radius $\frac{2M}{\sqrt{2}}$ Kurven. Abbildung 9 zeigt diese Kurven für $p(x) = x^3 + x^2 - 2$. Der eingezeichnete Kreis hat den Radius $\frac{2M}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$. Die schwarzen Strahlen unterteilen den Bereich außerhalb des Kreises in Sektoren. Die z in dem Sektor, der die x -Achse enthält, werden durch $z \mapsto z^n$ in den Sektor 1 der w -Ebene abgebildet, die des gegen den Uhrzeigersinn nächsten in den Sektor 2, und so fort. Die Zweige der Lösungskurven außerhalb des Kreises liegen in Sektoren, deren z in die Sektoren 2 oder 4 abgebildet werden.

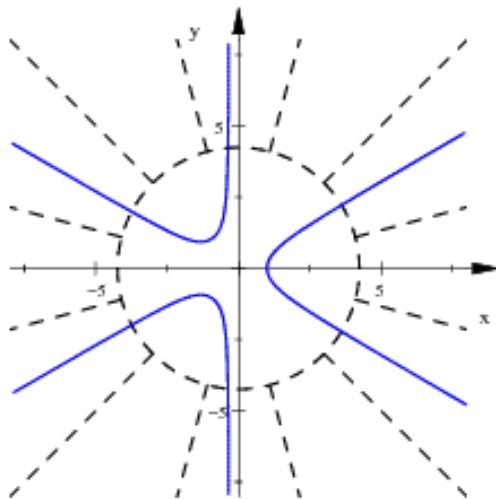


Abbildung 9: Kurven der z mit $\Re(p(z)) = 0$ in der z -Ebene

Man kann die gleiche Überlegung für den Imaginärteil $\Im(p(z))$ anstellen. Durchläuft z in der z -Ebene einen Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $r > \frac{2M}{\sqrt{2}}$, wird

der Imaginärteil $\Im(p(z))$ in jedem Sektor, der auf die Sektoren 1 oder 3 der w -Ebene abgebildet wird, genau einmal 0. Auch in diesem Fall bilden die entsprechenden z außerhalb der Kreises mit dem Radius $\frac{2M}{\sqrt{2}}$ Kurven, in Abbildung 10 sind sie zusätzlich zu der Kurve $\Re(p(z)) = 0$ für das Beispiel $p(x) = x^3 + x^2 - 2$ eingezeichnet. In den drei Punkten der z -Ebene, in denen sich die Kurven schneiden, werden Realteil und Imaginärteil von $p(z)$ gleichzeitig 0, diese z sind also Lösungen der Gleichung $p(z) = 0$.

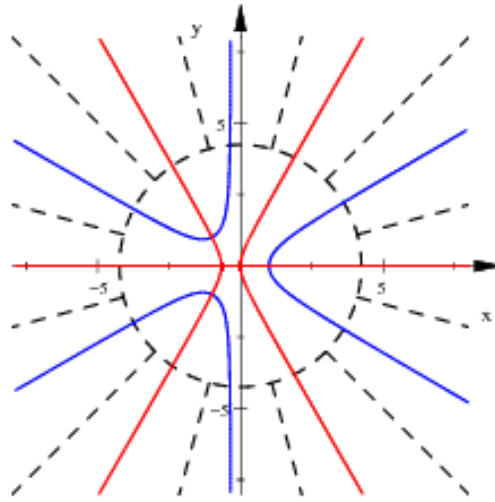


Abbildung 10: Kurven $\Im(p(z)) = 0$ (rot) und $\Re(p(z)) = 0$ (blau) in der z -Ebene für $p(z) = z^3 + z^2 - 2$

5.2.2 Das Argument

In Abbildung 10 **siehst** du die Lösungen der Gleichung $p(z) = 0$ für das konkrete $p(z)$, sie liegen im Inneren des gestrichelten Kreises. Bewiesen haben wir für beliebiges $p(z)$, dass es einen Kreis um den Nullpunkt der z -Ebene gibt, dessen Radius R wir sogar explizit angeben können, so dass Folgendes gilt: Wir können die z -Ebene in $4n$ Sektoren gleichen Winkels so einteilen, dass in jedem Sektor **außerhalb** des Kreises genau eine einfache Kurve liegt, für deren z gilt $\Re(p(z)) = 0$ oder $\Im(p(z)) = 0$, immer abwechselnd. Jeder Kreis um den Nullpunkt, dessen Radius größer als der kritische Radius R ist, schneidet jede dieser Kurven genau einmal. Wir wissen also nur etwas über die Verhältnisse außerhalb dieses Kreises, und wir können sogar definitiv ausschließen, dass es Lösungen von $p(z) = 0$ außerhalb des Kreises gibt. Abbildung 11 veranschaulicht die Situation.

Wie kommt Gauß nun zu der Aussage, dass sich rote und blaue Kurven innerhalb des Kreises schneiden müssen? Er sagt:

10 Notiz

Wenn eine solche³ Kurve, die aus dem Unendlichen kommt, in den Kreis eintritt, muss sie auch wieder aus ihm heraus, deshalb sind jeweils zwei der blauen Zweige und jeweils zwei der roten Zweige in Abbildung 11 innerhalb des Kreises verbunden.

Mir leuchtet keineswegs ein, dass das so sein muss, und ich hätte auch keine Idee, wie man die Aussage beweisen könnte!

³Für Fachleute: eine algebraische Kurve

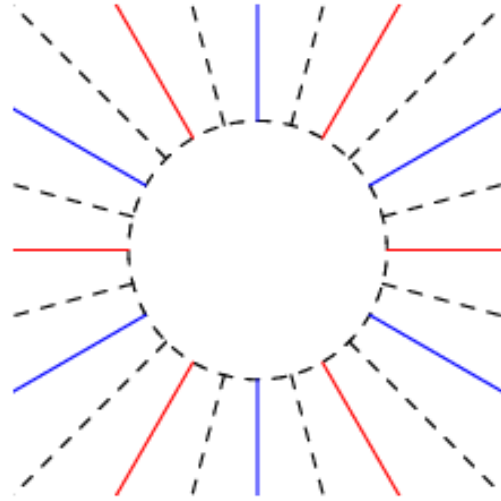


Abbildung 11: Was wir über die Kurven $\Im(p(z)) = 0$ (rot) und $\Re(p(z)) = 0$ (blau) in der z -Ebene definitiv wissen

Alexander Ostrowski, der in einem Aufsatz eine gründliche Untersuchung des Beweises vorlegt, beschreibt dort die Schwierigkeiten, mit denen ein Beweis fertig werden muss.⁴ Bevor er daran geht, die Lücke im Gaußschen Beweis zu schließen, schreibt er: „Insofern sind die Hilfsmittel, die wir im Folgenden benutzen, alle der Art, dass sie auch Gauß im Prinzip bekannt gewesen sein mögen. Gerade in der Algebra und in der Analysis situs⁵ lässt sich aber sehr oft ein an sich einfacher Gedanke nur mit großer Umständlichkeit durchführen, und wenn man bedenkt, dass Gauß sich bei einer solchen Durchführung nirgends an irgendwelche Vorbilder hätte halten können, so wird man verstehen, warum er sich für eine für unsere Begriffe reichlich summarische Darstellung entschlossen hat.“⁶

Ostrowski schließt in seinem Aufsatz die Lücke im Gaußschen Beweis, aber wir wollen nicht versuchen, seine Argumentation durchzubuchstabieren. Statt dessen folgen wir Gauß, wie er den Beweis mit Hilfe der Aussage unter 10 zu Ende bringt. Gauß argumentiert etwa so: Wir wählen einen der blauen Zweige, sagen wir, den ersten, auf den wir stoßen, wenn wir dem Kreis in Abbildung 11 ab der x -Achse gegen den Uhrzeigersinn folgen. Wir geben diesem Zweig die Nummer 1 und nummerieren die blauen Zweige ab diesem gegen den Uhrzeigersinn durch. Dieser Zweig 1 ist innerhalb des Kreises mit einem der anderen blauen Zweige verbunden, sagen wir, mit dem Zweig mit der Nummer k . Falls $k = 2$ ist, sind wir fertig, denn zwischen den beiden tritt nur ein roter Zweig in den Kreis ein, und um einen der anderen roten Zweige zu erreichen, muss er den blauen Zweig schneiden. Andernfalls schauen wir uns den blauen Zweig mit der Nummer 2 an. Er verlässt er den Kreis in dem Zweige k' . Ist $k' > k$, schneiden sich die blauen Zweige 1 und 2 innerhalb des Kreises. Der rote Zweig, der zwischen den blauen Zweigen 1 und 2 in den Kreis eintritt, muss innerhalb des Kreises einen der blauen Zweige 1 und 2 schneiden, um einen der anderen roten Zweige zu erreichen. Ist $2 < k' < k$, betrachten wir statt der Zweige 1 und k die Zweige 2 und k' und wiederholen den Vorgang. Nach höchstens $2n$ Schritten bricht der Prozess ab und wir haben einen Schnittpunkt nachgewiesen.

Gauß gibt in seiner Arbeit noch ein zweites Argument, dass die Gültigkeit der

⁴Ostrowski, S. 5f

⁵Topologie

⁶Ostrowski S. 7

unter der Nummer 10 notierten Behauptung plausibel machen soll. Und zwar stellt er fest, dass die blauen Kurven die Gebiete der z -Ebene, für deren z der Realteil von $p(z)$ positiv ist, von den Gebieten trennen, für deren z der Realteil von $p(z)$ negativ ist. Dann können sie nicht einfach irgendwo aufhören: man könnte ja um das Ende herum laufen und z mit positivem Realteil von $p(z)$ durch eine Kurve mit z mit negativem Realteil von $p(z)$ verbinden. Das leuchtet schon irgendwie ein, aber im Laufe der Zeit haben sich immer wieder als gewiss geglaubte Wahrheiten letztlich als falsch erwiesen, deshalb sind Mathematiker erst beruhigt, wenn ein sicherer Beweis vorliegt. Schau: eine geschlossene ebene Kurve, die sich nicht selbst schneidet, sollte doch die Ebene so in zwei Teile zerlegen, dass jede Kurve, die Punkte aus den beiden Teilen verbindet, unsere Kurve schneiden muss, oder? Dass das tatsächlich stimmt, ist genau die Aussage des Jordanschen Kurvensatzes, und dessen Beweis ist kein Pappentier. Vielleicht können wir an einem anderen Samstag besprechen, welche Wandlungen die Vorstellungen einer Funktion im Lichte immer neuer Entdeckungen durchmachen musste; heute verfolgen wir diese Frage nicht weiter.

5.3 Übungen

1. Es sei $p(x) = 0$ eine Gleichung n -ten Grades mit reellen Vorfaktoren wie in Gleichung (7) auf Seite 11, und es sei M die Summe der Absolutbeträge der Koeffizienten:

$$M := \sum_{j=1}^{n-1} |a_j|$$

Zeige, dass alle reellen Lösungen der Gleichung in $[-M, M]$ liegen.

2. Experimentiere selbst mit der MuPAD-Datei nullkurven.mn .

5.4 Wie Gauß den Fundamentalsatz ausspricht

In seinem ersten Beweis des Hauptsatzes⁷ formuliert Gauß den Hauptsatz so: Jede ganzrationale Funktion einer Veränderlichen, die nicht konstant ist, kann in reelle Faktoren ersten oder zweiten Grades zerlegt werden.

Ganzrationale Funktionen kennst du aus dem Unterricht der Stufe 11 (oder EF); es sind Funktionen, deren Term die Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

hat mit reellen Zahlen $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$. Wir können von $a_n \neq 0$ ausgehen. Nach Division durch a_n erhalten wir dann genau den Term, der auf der linken Seite von Gleichung (7) steht. Eine solche Gleichung hat nun mindestens eine Lösung $x_0 \in \mathbb{C}$.

Ist $x_0 \in \mathbb{R}$, können wir mit Hilfe der beliebigen Polynomdivision den Linearfaktor $x - x_0$ abspalten. Wir erhalten dann eine Zerlegung der Form

$$f(x) = (x - x_0)g(x) \quad ,$$

und das $g(x)$ sieht genau so aus wie das $f(x)$, sein Grad ist allerdings $n - 1$.

Falls x_0 imaginär ist, schließen wir aus

$$0 = \bar{0} = \overline{f(x_0)} = f(\bar{x}_0) \quad ,$$

dass auch $\bar{x}_0 \neq x_0$ eine imaginäre Nullstelle von $f(x)$ ist. Wiederum mit Hilfe der Polynomdivision erhalten wir eine Zerlegung

$$f(x) = (x - x_0)(x - \bar{x}_0)h(x) \quad .$$

⁷siehe Netto, Seite 3ff

Nun ist

$$(x - x_0)(x - \bar{x}_0) = x^2 - (x_0 + \bar{x}_0) \cdot x + x_0\bar{x}_0 \quad ,$$

und sowohl $x_0 + \bar{x}_0$ als auch $x_0\bar{x}_0$ sind reelle Zahlen. Folglich zerfällt in diesem Fall $f(x)$ in ein Produkt

$$f(x) = (x^2 + ax + b) \cdot h(x)$$

reeller Faktoren der Grade 2 und $n - 2$.

Wiederholen wir dieses Vorgehen, erhalten wir schließlich eine Zerlegung von $f(x)$ in reelle Faktoren der Grade 1 und 2, wie Gauß behauptet.

5.5 Von der Bedeutung des Fundamentalsatzes

Es gibt Behauptungen, in deren Beweis ungeheure Mühen investiert wurden, die aber weder theoretisch noch praktisch von Nutzen sind. Ein Beispiel ist der Große Satz von Fermat. Der Fundamentalsatz der Algebra ist aber nicht von dieser Art, ganz im Gegenteil. Ich will dies wenigstens durch einige Andeutungen belegen.

Der Fundamentalsatz sagt etwas über die Faktorisierung von Polynomen, das sind Terme von ganzrationalen Funktionen. Polynome kann man addieren und multiplizieren, aber nur sehr eingeschränkt dividieren; sie verhalten sich in dieser Hinsicht genau so wie ganze Zahlen. Ganze Zahlen kann man faktorisieren, und man erhält schließlich Produkte von Primzahlen. Der Fundamentalsatz sagt nun, wie reelle Polynome aussehen, die man nicht weiter faktorisieren kann. Wann hast du mit Primfaktorzerlegungen zu tun gehabt? Bei der Bruchrechnung. Will man eine Funktion integrieren, deren Term der Quotient zweier Polynome ist, muss man diesen Quotienten als Summe von Brüchen mit einfachen Nennern schreiben, und um diese einfachen Nenner zu bekommen, muss man das Nennerpolynom faktorisieren. Ich will das Problem nicht verschweigen, dass der Fundamentalsatz zwar die Existenz von Lösungen garantiert, aber nicht sagt, wie man sie findet. Die Eingangstür zum Schlaraffenland ist mit dem Fundamentalsatz leider nicht zu öffnen.

Ein zweites Beispiel: Vielleicht hast du in der 13 gelernt, Drehungen des Raumes oder Projektionen des Raumes auf eine Ebene mit Hilfe von quadratischen Matrizen zu beschreiben. Solche Matrixabbildungen verwendet man in viel allgemeineren Kontexten, und dann sucht man Teile der betrachteten Räume, die von der Abbildung in sich überführt werden. Bei einer Drehung sind dies die Drehachse und die Ebene durch den Nullpunkt, die zur Drehachse senkrecht steht. In Zahlbereichen, die so groß sind, dass der Fundamentalsatz gilt, findet man immer solche Teile, und das ist ein großer Vorteil. Man sucht dann so genannte Eigenwerte der Matrix, und die sind Lösungen gewisser Gleichungen. Solche Eigenwertprobleme gibt es recht häufig. – Mit diesen Andeutungen will ich es nun genug sein lassen; sie geben dir hoffentlich wenigstens eine vage Ahnung von der Bedeutung des Fundamentalsatzes.

6 Literatur

Gauß hat seine Werke anfangs noch in Latein veröffentlicht, aber es gibt eine deutsche Übersetzung. Sie wurde 1890 unter dem Titel „Die vier Gaußschen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Funktionen in reelle Faktoren ersten oder zweiten Grades, 1799–1849“ in der Reihe Ostwaldts Klassiker herausgegeben von Eugen Netto. Das Heftchen wird in den Vereinigten Staaten nachgedruckt und ist heute noch unter dem Originaltitel erhältlich.

Ganz ausgezeichnet ist der Artikel von Alexander Ostrowski „Über den ersten und vierten Gaußschen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra“, man findet ihn in Band 10.2 der Ausgabe der Werke von C. F. Gauß.

Einen schönen Überblick gewinnt man in Reinhold Remmerts Kapitel zum Fundamentalsatz der Algebra in Kapitel 4 des Sammelbandes mit dem Titel „Zahlen“, herausgegeben von Ebbinghaus und anderen, erschienen in der Reihe Grundwissen der Mathematik im Springer-Verlag. Ich benutze die dritte Auflage von 1992.

Schließlich findet man viel Schönes und Wichtiges zum Thema in einer für Schüler lesbaren Form in Philip Kramers Facharbeit. Sie ist dem Material als pdf-Datei beigefügt.