

Was sind Differentialgleichungen?

Dennis Dyck und B. Waldmüller

17. Februar 2011

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|---|--|----|
| 1 | Ein paar Beispiele | 2 |
| 2 | Differentiale | 3 |
| 3 | Das Differential dy als linearer Anteil einer Änderung | 4 |
| 4 | Das Richtungsfeld einer Differentialgleichung | 5 |
| 5 | Beispiel: Auslaufendes Wasser | 8 |
| 6 | Beispiel: Die Schnecke und das Rennpferd | 10 |
| 7 | Numerische Lösung einer Randwertaufgabe | 13 |
| 8 | Lösungsansatz mit „variablen Konstanten“ | 15 |

1 Ein paar Beispiele

Du musstest schon häufig Gleichungen lösen. Dann wurde dir eine Gleichung vorgelegt, also so etwas wie

$$3x + 4 = 19 \quad ,$$

und deine Aufgabe war, eine Zahl oder gar alle Zahlen zu finden, die die Gleichung erfüllen, wenn man sie für x einsetzt. Hier ist 5 eine Lösung, denn $3 \cdot 5 + 4 = 19$, und 7 ist keine Lösung, denn $3 \cdot 7 + 4 = 25 \neq 19$.

Differentialgleichungen sehen etwas anders aus. Ich schreibe einige Beispiele hin:

$$y' = x + \frac{1}{x}y \quad (1)$$

$$y' = \frac{2y}{x} \quad (2)$$

$$y' = -\frac{x}{y} \quad (3)$$

Eine Lösung einer Differentialgleichung ist eine **Funktion!** Funktionen kennst du, in der Regel begegnen dir die jedoch in der Form einer Funktionsgleichung $y = f(x)$. In dieser Schreibweise stellt die Gleichung 1 die Aufgabe, eine Funktion f in der Variablen x zu finden, für die

$$f'(x) = x + \frac{1}{x}f(x)$$

ist. Dies ist viel sperriger als die Originalgleichung, in dieser war alles Überflüssige weggeschliffen. Einen Funktionsnamen braucht man nicht. Die unabhängige Variable heißt x , die Abhängige y , eigentlich besser $y(x)$, aber das (x) lässt man weg. Die Ableitung der Funktion nach x heißt einfach y' .

Woher kommen die Beispielgleichungen? Wenn der Graph von $y = y(x)$ ein Kreis mit Radius r um den Nullpunkt ist, steht die Tangente auf dem Berührradius senkrecht – das liefert die Gleichung 3. Eine Lösung von Gleichung 3 ist folglich durch

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

gegeben. Eine Gerade, die eine Parabel mit Scheitelpunkt $(0;0)$ im Punkt $(x;y)$ berührt, schneidet die x -Achse an der Stelle $\frac{x}{2}$, wie die 11-er wissen, deshalb ist ihre Steigung $\frac{2y}{x}$, und das liefert das Beispiel 2. Folglich ist $y = cx^2$ eine Lösung. Das Beispiel in Gleichung 1 schließlich habe ich aus einem Buch abgeschrieben. Dort stand auch die Lösung

$$y = x^2 + cx \quad .$$

Aufgabe Rechne nach, dass sie angegebenen Funktionen jeweils Lösungen der Differentialgleichungen sind. Vorsicht, bei Gleichung 3 brauchst du die Kettenregel, die kennen nicht alle von euch.

2 Differentiale

So weit, so gut. Eine Differentialgleichung ist also eine Gleichung, in der eine Funktion und Ableitungen dieser Funktion vorkommen, und man soll die Funktion bestimmen. Aber wo sind die Differentiale dabei? Erinnerung: wie du die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion f definiert hast. Das ging so:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x) .$$

Ich unterdrücke nun den Namen der Funktion. Im Zähler steht die Änderung Δy , die die abhängige Variable y erfährt, wenn man die unabhängige Variable x der Änderung $h = \Delta x$ unterwirft. Damit sieht die Sache so aus:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} y'$$

Für „kleine“ Δx ist dann

$$\Delta y \approx y' \Delta x .$$

Die Schreibweise $f'(x)$ für die Ableitung der Funktion f an der Stelle x stammt, meine ich, von Legendre. Gottfried Wilhelm Leibniz hatte sich ein anderes Symbol dafür ausgedacht. Er hätte geschrieben

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} ,$$

die Ableitung fasste er als Quotient von Differentialen dy und dx auf. Für endliche Δy und Δx gilt nur $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx y'(x)$ und $\Delta y \approx y'(x)\Delta x$, für die (als unendlich kleine Größen gedachten) Differentiale sollte scharf

$$\frac{dy}{dx} = y' \quad \text{und} \quad dy = y' dx$$

gelten. Ich sage im Unterricht, ein kleines Stück einer glatten Kurve sei praktisch gerade. In der Sprache der Differentiale könnte man sagen, ein „unendlich kleines“ Stück einer glatten Kurve sei tatsächlich gerade.

Als ich Anfang der siebziger Jahre Analysis lernte, war es strengstens verpönt, von unendlich kleinen Größen auch nur in Ansätzen zu reden. Die Physiker haben aber immer mit solchen Vorstellungen gearbeitet, mochten die Mathematiker das als Spökenkiererei verdammen, wie sie wollten. Ende der Siebziger konstruierte dann Abraham Robinson eine Analysis, in der unendlich kleine Größen ihren Platz hatten; er schuf eine ordentliche, widerspruchsfreie Theorie, die so genannte Nonstandardanalysis. Jede endliche Zahl ist von einer Wolke von Zahlen umgeben. Zwei Zahlen einer Wolke unterscheiden sich nur um eine unendlich kleine Zahl, niemals enthält eine Wolke zwei verschiedene endliche Zahlen. Seitdem darf man in der Mathematik eigentlich unendlich kleine Größen verwenden.

Mit diesen Andeutungen über unendlich kleine Größen will ich es genug sein lassen, weder kann ich noch will ich eine Einführung in die Nonstandardanalysis geben.

3 Das Differential dy als linearer Anteil einer Änderung

In russischen Analysisbüchern wurden Differentiale in folgender Weise dargestellt. Eine Änderung Δx der unabhängigen Variablen x einer Funktion bewirkt eine Änderung Δy der abhängigen Variablen. Diese Änderung Δy setzt sich zusammen aus dem linearen Anteil $f'(x)\Delta x$ und dem Abschneidefehler $r(\Delta x)$, den man begeht, wenn man anstelle der Funktion ihre Tangente verwendet (siehe Abbildung 1).

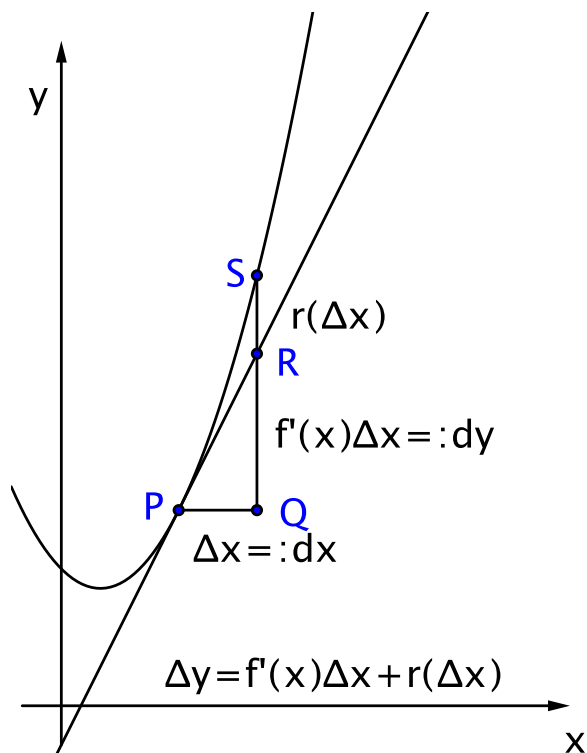


Abbildung 1: Linearer Anteil einer Änderung

Dieser Fehler strebt noch gegen 0 für $\Delta x \rightarrow 0$, wenn man ihn durch h dividiert:

$$\frac{r(\Delta x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0 \text{ ,}$$

er ist also für kleine Δx deutlich kleiner als der lineare Anteil selbst. Deshalb kommt man in aller Regel gut zurecht, wenn mit dem linearen Anteil arbeitet statt mit der gesamten Änderung Δy selbst. Man setzt nun $dx := \Delta x$ und $dy := f'(x)dx$, dann haben die Differentiale dy und dx eine klare Bedeutung, und es ist sogar

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \text{ .}$$

Allerdings hat dieses Werkzeug nicht die gleiche heuristische Kraft wie die unendlich kleinen Größen der Physiker.

4 Das Richtungsfeld einer Differentialgleichung

Die Beispiele (1), (2) und (3) und Seite 2 kannst du so lesen: Wenn $(x; y)$ ein Punkt des Graphen einer Lösungsfunktion $y = y(x)$ ist, gibt die Differentialgleichung jeweils an, welche Steigung die Kurve in diesem Punkt hat. Wir kennen zwar noch keine Punkte des Graphen, aber davon darf man sich nicht irre machen lassen. Man kann ja in beliebig gewählten Punkten der Ebene durch einen kleinen Strich die Richtung andeuten, die eine Lösungskurve in diesem Punkt haben muss. In der Regel wählt man dazu die Punkte eines Gitters. Das Bild, das dann entsteht, nennt man ein Bild des Richtungsfeldes der Differentialgleichung. Die Abbildungen (2) bis (5) zeigen einige Beispiele.

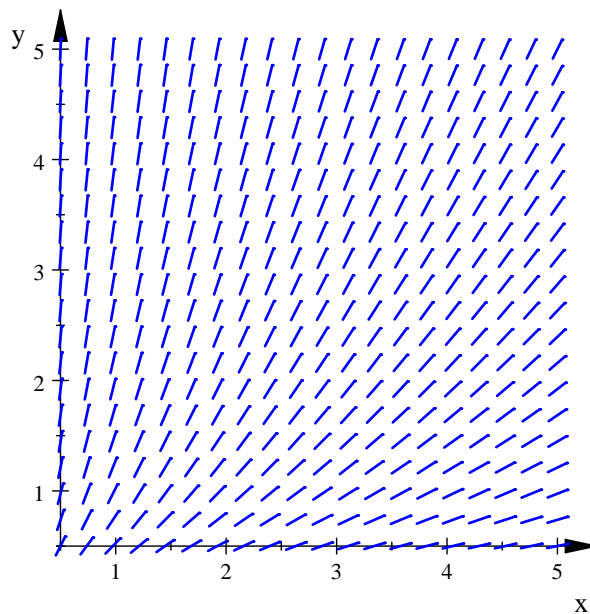


Abbildung 2: Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = \frac{2x}{y}$

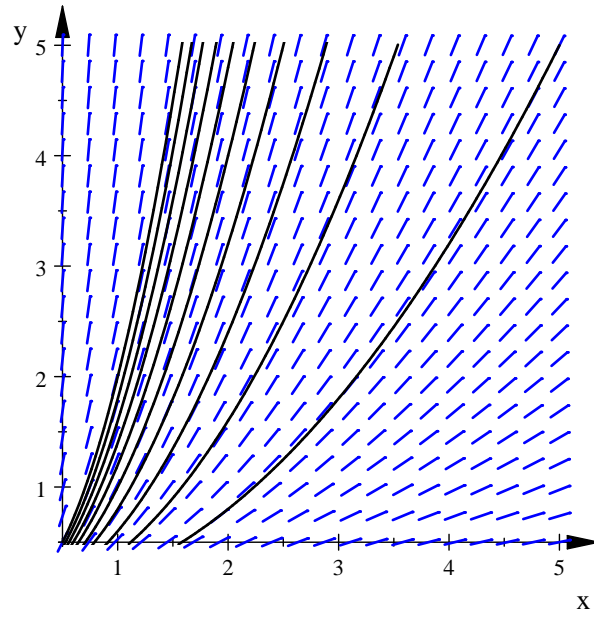


Abbildung 3: Richtungsfeld mit Lösungskurven

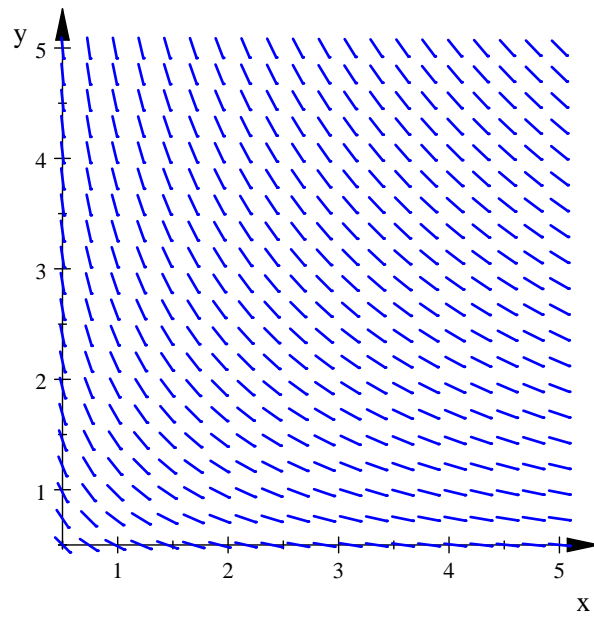


Abbildung 4: Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = -\frac{y}{x}$

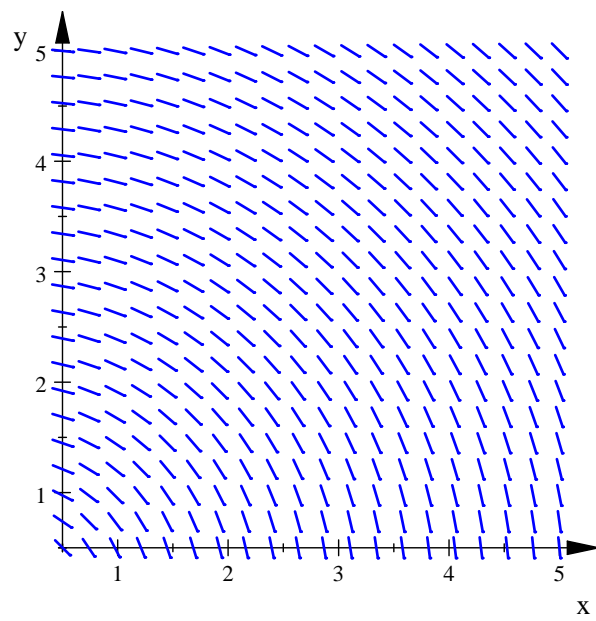


Abbildung 5: Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = -\frac{x}{y}$

5 Beispiel: Auslaufendes Wasser

Dieses Beispiel aus dem Analysislehrbuch von Kroll und Vaupel stellte Philip Kramer vor: In einem Behälter mit dem Querschnitt A steht Wasser. Durch ein Rohr mit dem Querschnitt a am Boden des Behälters läuft unter dem Einfluss der Schwerkraft ständig Wasser aus, die Höhe h des Wasserstandes hängt also von der Zeit t ab. Gesucht ist die Funktion $h(t)$.

In einer kurzen Zeitspanne Δt fällt der Wasserstand um Δh , das Volumen des Wassers im Behälter nimmt entsprechend um

$$\Delta V = A\Delta h$$

ab. Natürlich hängt auch die Geschwindigkeit v des ausströmenden Wassers von h ab, aber für eine sehr kurze Zeitspanne können wir v als konstant ansehen – der übliche Trick! Dann fließt in der Zeit Δt ein Wasserkörper des Volumens

$$\Delta V = av\Delta t$$

aus dem Behälter ins Rohr. Es folgt

$$A\Delta h = av\Delta t \quad . \quad (4)$$

Das $v = v(h)$ ermitteln wir über eine Energiebilanz. Das System verliert die potentielle Energie

$$\Delta E_{pot} = \rho h \Delta V \quad ,$$

und der auslaufende Wasserkörper gewinnt die kinetische Energie

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} \rho v^2 \Delta V \quad .$$

Wir nehmen vereinfachend an, dass die verlorene Lageenergie vollständig in Bewegungsernergie umgesetzt wird. Dann ist

$$\rho h \Delta V = \frac{1}{2} \rho v^2 \Delta V \quad .$$

Diese Gleichung lösen wir nach v auf und setzen das Ergebnis $v = \sqrt{2h}$ in die Gleichung 4 ein. Es ergibt sich

$$A\Delta h = a\sqrt{2h}\Delta t \quad .$$

Wenn man nun noch durch Δt dividiert und den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ durchführt, hat man die Differentialgleichung für h ! Sie lautet:

$$\boxed{h' = \frac{\sqrt{2}a}{A} \sqrt{h}} \quad (5)$$

Lösung der Differentialgleichung Diese Differentialgleichung lässt sich nach einer relativ einfachen Methode lösen, man nennt sie „Trennung der Variablen“ :

Man dividiert durch \sqrt{h} und wendet Ableitungsregeln an.

$$\begin{aligned}\frac{h'}{\sqrt{h}} &= \frac{\sqrt{2}a}{A} \\ \frac{h'}{2\sqrt{h}} &= \frac{\sqrt{2}a}{2A} \\ (\sqrt{h})' &= \frac{\sqrt{2}a}{2A} \\ \sqrt{h} &= \frac{\sqrt{2}a}{2A}t + C \\ h &= \left(\frac{\sqrt{2}a}{2A}t + C\right)^2\end{aligned}$$

Die Konstante C in der Lösung

$$h(t) = \left(\frac{\sqrt{2}a}{2A}t + C\right)^2$$

bestimmt man aus der Anfangsbedingung $h_0 = h(0)$.

6 Beispiel: Die Schnecke und das Rennpferd

Ein Rennpferd galoppiert mit konstanter Geschwindigkeit v_P . Es ist durch ein Gummiband mit einem festen Punkt verbunden. Das Gummiband hat zur Startzeit $t = 0$ des Pferdes die Ausgangslänge l_0 und zur Zeit t die Länge

$$l(t) = l_0 + v_P t \quad . \quad (6)$$

Wir nehmen an, dass das Band beliebig dehnbar ist und sich gleichmäßig ausdehnt.

Auf dem Gummiband kriecht eine Schnecke. Unverdrossen folgt sie mit der Eigengeschwindigkeit $v_S \ll v_P$ dem Rennpferd. Wir wollen nun der Frage nachspüren, wie diese Sache ausgeht. Es sei $s(t)$ die Entfernung der Schnecke zur Zeit t vom Startpunkt, dann ist $s(0) = 0$. Einen Term für $s(t)$ bekommt man nicht so leicht, und deshalb sucht man nach einer Differentialgleichung für die Ableitung $s'(t)$ von $s(t)$, das ist eine sehr typische Situation. Man fragt dann, wie lang die Strecke $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$ ist, die die Schnecke in der Zeitspanne von t bis $t + \Delta t$ zurücklegt. Durch ihre Eigengeschwindigkeit v_S kommt die Schnecke auf dem Gummiband den Weg $v_S \Delta t$ weiter. Das Stückchen Gummiband, auf dem die Schnecke sich gerade befindet, bewegt sich aber selbst mit der Geschwindigkeit

$$\frac{s(t)}{l(t)} \cdot v_P = \frac{s(t)}{l_0 + v_P t} \cdot v_P \quad .$$

Insgesamt legt die Schnecke also relativ zum Boden in der Zeitspanne Δt die Wegstrecke

$$\Delta s = v_S \Delta t + \frac{s(t)}{l_0 + v_P t} \cdot \Delta t$$

zurück. Wir gehen von einem sehr kleinen Δt aus, und deshalb können wir die Geschwindigkeit des Gummibandstückchens der Schnecke als konstant ansehen, obwohl sie sich ja minimal erhöht, weil die Schnecke ihren Anteil des durchkrochenen Gummibandes am ganzen Band durch ihr Weiterkriechen etwas vergrößert. Aber dieser Zuwachs der Geschwindigkeit der Schnecke liegt in der Größenordnung

$$s''(t) \Delta t$$

und das dadurch bewirkte Mehr an Weg demnach in der Größenordnung

$$s''(t) \Delta t \cdot \Delta t = s''(t) \cdot (\Delta t)^2 \quad , \quad (7)$$

und von Gliedern „höherer Ordnung in Δt “ sieht man ab. Das ist eigentlich der entscheidende Trick. Will man alles ganz genau machen, kommt man nicht zum Ziel. Man muss nur darauf achten, dass der begangene Fehler schnell genug gegen 0 geht, wenn Δt gegen 0 geht. Und der Fehler in der Gleichung (7) geht noch mit Δt gegen 0, wenn man ihn durch Δt dividiert.

Nun braucht man nur noch durch Δt zu dividieren

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \approx v_S + \frac{s(t)}{l_0 + v_P t}$$

und dann Δt gegen 0 laufen zu lassen, dann hat man eine Differentialgleichung für $s(t)$:

$$\boxed{s'(t) = v_S + \frac{s(t)}{l_0 + v_P t}} \quad (8)$$

Dieses schöne Beispiel stellte Eugen Penner vor, er hatte sich damit in seiner Facharbeit befasst. Gelöst hat er die Differentialgleichung näherungsweise numerisch. Er kennt ja $s(0) = 0$, daraus berechnet er sich mit Hilfe der Differentialgleichung (8) die Geschwindigkeit $s'(0)$ der Schnecke zur Zeit $t = 0$. Nun wählt er eine Schrittweite Δt und berechnet

$$s(\Delta t) \approx s'(0)\Delta t \quad ,$$

und weiter

$$\begin{aligned} s(2\Delta t) &\approx s(\Delta t) + s'(\Delta t)\Delta t \quad , \\ s(3\Delta t) &\approx s(2\Delta t) + s'(2\Delta t)\Delta t \quad , \\ &\dots \\ s((k+1)\Delta t) &\approx s(k\Delta t) + s'(k\Delta t)\Delta t \\ &\dots \end{aligned}$$

Dieses einfache Näherungsverfahren heißt Polygonzugverfahren, man bekommt damit eine Wertetabelle für die gesuchte Funktion $s(t)$, die die Differentialgleichung erfüllt und die an der Stelle $t = 0$ den gegebenen Wert $s(0)$ hat. Bei einer solchen Problemstellung spricht man von einer Anfangswertaufgabe.

Eugens Ergebnis kann man sich in seiner MuPAD-Datei spEugen.mn anschauen – die Schnecke holt das Rennpferd auf lange Sicht ein! Bei realistischen Daten dauert es allerdings sehr, sehr lange, und den Fall konnte Eugen nicht numerisch bearbeiten. Die Abbildung 6 auf der Seite 11 stammt aus Eugens Arbeit, sie zeigt, wie der Vorgang bei $v_P = 1$ und $v_S = 0,6$ abläuft. Aus der Wertetabelle für $s(t)$, die er für 100 Schritte mit der Schrittweite $\Delta t = 0,1$ erhalten hat, lässt er MuPAD einen Graphen der Funktion erstellen (blaue Kurve). Die braune Gerade zeigt den Ort des Pferdes zur Zeit t , die Schnecke holt das Pferd nach etwa 5.5 Zeiteinheiten ein.

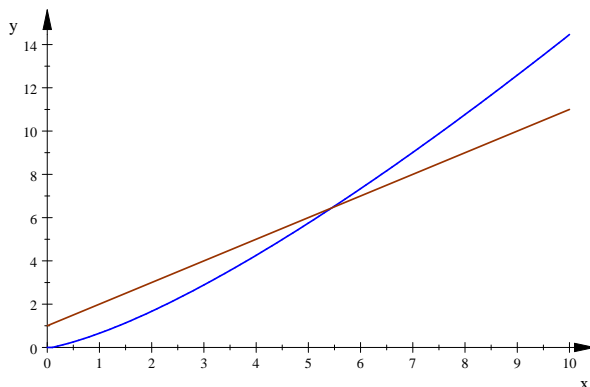


Abbildung 6: Näherungslösung zum Schnecke–Rennpferd–Problem

Eugen hat auch Untersuchungen zur Güte der Näherungslösung angestellt. Er nahm die schon ganz akzeptablen Werte $v_P = 1$, $v_S = 0,01$ und $l_0 = 1$ und beobachtete den Prozess zehn Zeiteinheiten lang. Die Abbildung 7 auf der Seite 12 zeigt die Graphen der exakten Lösung (rote Kurve) und der Näherungslösung aus 100 Schritten der Schrittweite $\Delta t = 0,1$ (blaue Kurve).

Eugen demonstriert in der Abbildung 8, wie sich die Güte der Näherungslösung durch Verkleinern der Schrittweite verbessern lässt. Hier sind wieder die Graphen der exakten Lösung in rot und der Näherungslösung zu $\Delta t = 0,1$ und zusätzlich

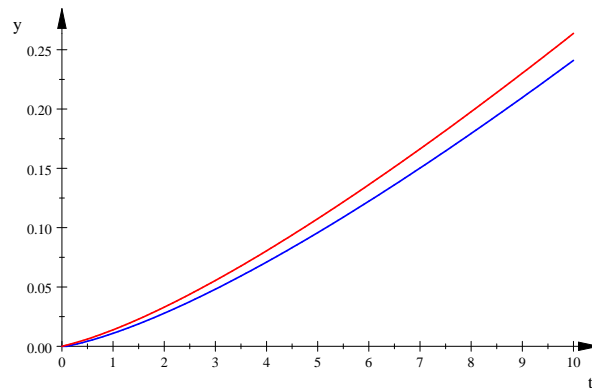


Abbildung 7: Exakte Lösung (rot) und Näherungslösung mit $\Delta t = 0,1$ des Schnecke–Rennpferd–Problems

der Graph der Näherungslösung zu 200 Schritten der Schrittweite 0,05 dargestellt. Durch weiteres Verkleinern der Schrittweite (bei entsprechender Vergrößerung der Schrittzahl kam Eugen der exakten Lösung beliebig nahe.

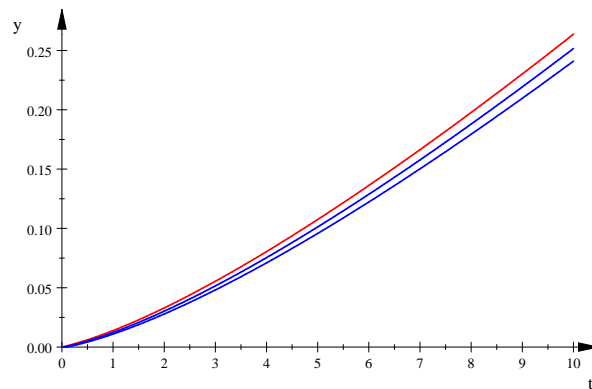


Abbildung 8: Exakte Lösung (rot) und Näherungslösungen mit $\Delta t = 0,1$ und $\Delta t = 0,2$ des Schnecke–Rennpferd–Problems

Weitere Informationen findet man in Eugens MuPAD–Datei spEugen.mn und in dem Buch „Mathematik ist überall“ von Norbert Herrmann.

7 Numerische Lösung einer Randwertaufgabe

Bei einer Randwertaufgabe ist eine Funktion gesucht, die auf einem Intervall $[a; b]$ eine gegebene Differentialgleichung löst und an den Intervallgrenzen vorgegebene Werte annimmt. Wie man eine Randwertaufgabe numerisch lösen kann, zeigten Dennis Dyck und Niklas Hilmer an folgendem Beispiel:

$$y'' + y = 0 \quad \text{und} \quad y(0) = 0, \quad y(4) = 2 \sin(4) \quad (9)$$

Dennis hat den Vortrag der beiden in etwa nacherzählt:

Als erstes brauchen wir Näherungen für y' und y'' , die bekommen wir leicht über die h -Methode. Für kleine h gilt nämlich

$$y'(x) \approx \frac{1}{h} \left[y \left(x + \frac{h}{2} \right) - y \left(x - \frac{h}{2} \right) \right] \quad (10)$$

und

$$y'' \approx \frac{1}{h} \left[y' \left(x + \frac{h}{2} \right) - y' \left(x - \frac{h}{2} \right) \right] . \quad (11)$$

Setzen wir für die y' -Terme in Gleichung (11) die entsprechenden Näherungen aus Gleichung (10) ein, erhalten wir

$$y''(x) \approx \frac{1}{h} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right] ,$$

also

$$y''(x) \approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} . \quad (12)$$

Was machen wir jetzt damit? Wir setzen es in unsere Differentialgleichung ein multiplizieren mit h^2 . Dies führt zu der Gleichung

$$h^2 y(x) + y(x+h) - 2y(x) + y(x-h) = 0 ,$$

und die vereinfachen wir zu

$$y(x+h) + (h^2 - 2)y(x) + y(x-h) . \quad (13)$$

Wir suchen uns nun Messstellen¹, an denen wir die Funktionswerte bestimmen. Die Messstellen sollen in gleichen Abständen in dem Intervall $[0; 4]$ liegen, und diese Abstände sind unsere Schrittweite h . Bei $n = 4$ Messstellen ist

$$h = \frac{4 - 0}{5} = \frac{4}{5} ,$$

und die Messstellen sind

$$\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \frac{12}{5} \quad \text{und} \quad \frac{16}{5} .$$

Wenn wir in Gleichung (13) für h den Wert $\frac{4}{5}$ und für x jeweils eine unserer Messstellen einsetzen, erhalten wir das folgende Gleichungssystem für die Funktionswerte

¹Der in der Numerik übliche Fachbegriff ist Stützstellen.

an den Messstellen:

$$\begin{aligned}
 y\left(\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\right) + \left[\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 2\right] \cdot y\left(\frac{4}{5}\right) + y\left(\frac{4}{5} - \frac{4}{5}\right) &= 0 \quad \text{für } x = \frac{4}{5} \\
 y\left(\frac{8}{5} + \frac{4}{5}\right) + \left[\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 2\right] \cdot y\left(\frac{8}{5}\right) + y\left(\frac{8}{5} - \frac{4}{5}\right) &= 0 \quad \text{für } x = \frac{8}{5} \\
 y\left(\frac{12}{5} + \frac{4}{5}\right) + \left[\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 2\right] \cdot y\left(\frac{12}{5}\right) + y\left(\frac{12}{5} - \frac{4}{5}\right) &= 0 \quad \text{für } x = \frac{12}{5} \\
 y\left(\frac{16}{5} + \frac{4}{5}\right) + \left[\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 2\right] \cdot y\left(\frac{16}{5}\right) + y\left(\frac{16}{5} - \frac{4}{5}\right) &= 0 \quad \text{für } x = \frac{16}{5}
 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann man lösen, und dann hat man Näherungswerte für die Werte $y(\frac{4}{5})$, $y(\frac{8}{5})$, $y(\frac{12}{5})$ und $y(\frac{16}{5})$, die die Funktion an den Messstellen annimmt. Die Werte $y(0) = 0$ und $y(4) = 2 \sin(4)$ sind ja bekannt!

Für die, die sich mit Linearen Gleichungssystemen auskennen, schreiben wir das System für $n - 1$ Messstellen in Vektor-Matrix-Schreibweise hin:

$$\begin{pmatrix}
 2 - h^2 & 1 & 0 & \dots & & & \\
 1 & 2 - h^2 & 1 & 0 & \dots & & \\
 0 & 1 & 2 - h^2 & 1 & 0 & \dots & \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \\
 0 & \dots & 0 & 1 & 2 - h^2 & 1 & \\
 0 & \dots & & 0 & 1 & 2 - h^2 &
 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}
 y(h) \\
 y(2h) \\
 y(3h) \\
 \vdots \\
 y((n-1)h)
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 -y(0) \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 -y(4)
 \end{pmatrix}$$

Wir haben das Verfahren für die Werte $n = 4$, $n = 12$ und $n = 20$ ausprobiert. Das Lösen der Gleichungssysteme und das Zeichnen der Lösungskurve hat uns MuPAD abgenommen², natürlich liefert der Satz der Funktionswerte an den Messstellen nur einen Polygonzug. Aber den kann man gut mit dem Graphen der exakten Lösung $y = 2 \sin(x)$ vergleichen. Die exakte Lösung kennen wir aus der Physik, die Differentialgleichung ist ja die des Harmonischen Oszillators. Wie die Abbildung 9 zeigt, wird die exakte Lösung schon für $n = 20$ gut durch die Näherungslösung wiedergegeben.

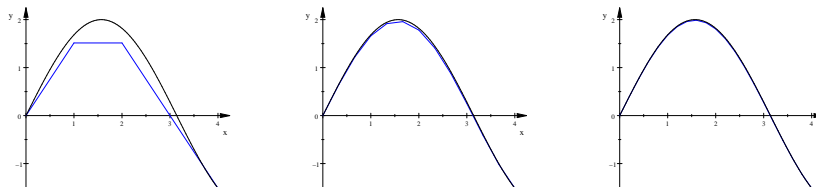


Abbildung 9: Exakte Lösungskurve (schwarz) und Näherungskurven für $n = 4$, $n = 12$ und $n = 20$

²Das kann, wer mag und MuPAD zur Verfügung hat, mit Hilfe der Datei LGS.mn genauer anschauen.

8 Lösungsansatz mit „variablen Konstanten“

Der Name der Methode klingt ein wenig paradox, aber die Sache ist recht einleuchtend. Man probiert aus, ob es in einer Funktionenschar Lösungen einer gegebenen Differentialgleichung gibt. Ich zeige es an einem Beispiel. Wir suchen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + y = 0 \quad . \quad (14)$$

Vielleicht gibt es ja eine Lösung, die man in der Form

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_kx^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k \quad (15)$$

schreiben kann, Fachleute sagen, die man als Potenzreihe schreiben kann. Man setzt diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein und schaut, ob man die a_k so einstellen kann, dass die Sache aufgeht.

Potenzreihen sind recht geduldige Vertreter. Ein großer Vorzug kommt gleich zum Tragen: man kann sie gliedweise differenzieren. Das heißt, man bekommt die Ableitung der Potenzreihe, indem man einfach die Summanden ableitet. Folglich ist:

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + ka_kx^{k-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} ka_kx^{k-1} \quad (16)$$

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3x + \cdots + k(k-1)a_kx^{k-2} + \cdots = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_kx^{k-2} \quad (17)$$

Wir setzen nun die Reihen für y und für y'' in die Differentialgleichung (14) ein. Jetzt kommt gleich der zweite große Vorzug von Potenzreihen zum Tragen: man kann sie nämlich vernünftig addieren. Damit wird aus (14):

$$(a_0 + 2a_2) + (a_1 + 3 \cdot 2 \cdot a_3)x + (a_2 + 4 \cdot 3 \cdot a_4)x^2 + \cdots + (a_k + (k+2)(k+1)a_{k+2})x^k + \cdots = 0$$

oder, mit dem Summenzeichen geschrieben,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + (k+2)(k+1)a_{k+2})x^k = 0 \quad .$$

Aus dieser Gleichung kann man die a_k nacheinander ausrechnen, denn eine Potenzreihe stellt nur dann die Nullfunktion

$$x \mapsto 0 \quad \text{für alle } x \text{ aus einem Intervall}$$

dar, wenn alle Koeffizienten ausnahmslos $= 0$ sind. Es ergibt sich zum Einen

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{2}a_0 \\ a_4 &= -\frac{1}{4 \cdot 3}a_2 = \frac{1}{4!}a_0 \\ a_6 &= -\frac{1}{6 \cdot 5}a_4 = -\frac{1}{6!}a_0 \quad \text{und so weiter,} \end{aligned}$$

und zum Anderen

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{1}{3 \cdot 2}a_1 \\ a_5 &= -\frac{1}{5 \cdot 4}a_3 = \frac{1}{5!}a_1 \quad \text{und so weiter.} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{(2k)!} a_0 \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots \text{ und}$$
$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} a_1 \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots .$$

Nun machen wir Gebrauch von den nächsten beiden schönen Eigenschaften von Potenzreihen: wir dürfen nämlich die Summanden mit den ungeraden und die mit den geraden Indizes jeweils für sich aufaddieren und a_0 beziehungsweise a_1 ausklammern. Damit erhalten wir als Lösung der Differentialgleichung (14)

$$y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} , \quad (18)$$

und das ist, wie manche von euch wissen,

$$y = a_0 \cos(x) + a_1 \sin(x) .$$