Die Fundamentalgruppe

Die Lehre von den Gummibändern

Henrik Schumacher

31. Oktober 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Ein Problem mit Schnüren

> Herr X ist Mathematiker. Zu seinem Unglück hat sich ihm seine ebenso reiche wie geizige Erbtante zum Besuch angekündigt. Er nimmt sich vor, bei dieser Gelegenheit den röhrenden Hirsches, den ihm die Erbtante vor Urzeiten geschenkt hat, loszuwerden. Da er das kitschige Gemälde natürlich nicht selbst vernichten darf, plant er, den außerordentlichen Geiz seiner Tante auszunutzen, so dass diese das Bild selbst zerstört:
>
> Gegenüber der Tür schlägt er zwei Nägel in die Wand und hängt das Bild mit Hilfe einer Schnur, deren beiden Enden am Bild befestigt sind, an die beiden Nägel. Wenn auch nur einer der beiden Nägel herausgezogen wird, soll das Bild sofort zu Boden fallen. Wenn die Tante den Raum betritt – so der Plan – zöge sie empört den vermeintlich überflüssigen Nagel aus der Wand, woraufhin das Bild herunterfiele und zerbräche.

Wir wollen uns zunächst mit dem folgenden Problem und seiner systematischen Lösung beschäftigen.

Problem 1.1 Natürlich kann man das Bild an nur einen Nagel hängen und hoffen, dass die Tante just diesen Nagel herauszieht. Sowas ist dem Herrn X natürlich zu unsicher. Wie muss er das Bild aufhängen, damit es egal ist, welcher Nagel gezogen wird? Geht das überhaupt?

Das erste Problem, das sich beim Lösen dieser Aufgabe ergibt, ist das der Reproduzierbarkeit: Natürlich wird man sich zunächst dem eigenen Spieltrieb hingeben, sich einen Faden und ein Brett mit zwei Nägeln oder Ähnliches suchen und einfach ausprobieren. Schnell stellt man fest, dass man das Bild eigentlich nicht braucht, sondern dass es reicht, wenn man den Faden an den Enden zu einer Schlaufe zusammenbindet oder die Enden zusammenhält. Man wickelt die Schnur also ein paar Mal um die Nägel (wir nennen so eine Konfiguration, bei der die Schnur um die Nägel gewickelt ist, eine *Schleife*), zieht dann einen heraus und guckt, ob man die Schleife nach unten wegziehen kann. Gelingt einem das, hat man das Problem, das man die soeben probierte Konfiguration wiederholen muss, um zu testen, ob es beim Rausziehen des anderen Nagels auch noch klappt. Außerdem muss man das Ergebnis ja irgendwie angeben können; es wäre also wünschenswert, wenn man die Art und Weise, wie man den Faden um die Nägel wickelt, irgendwie eindeutig kodieren könnte – und zwar so, dass man möglichst wenig „Speicherplatz“ dafür braucht. Eine Möglichkeit ist natürlich, ein Foto oder ein Bild, aus dem auch hervorgeht, welcher Faden oben oder unten ist, wenn sich zwei Fäden kreuzen, anzufertigen. Für jede Schleife gibt es also genau so ein Bild. Allerdings können zwei recht verschieden aussehende Schleifen tatsächlich recht ähnliche bzw. im Wesentlichen gleiche Schnurverläufe wiedergeben: Wickelt man

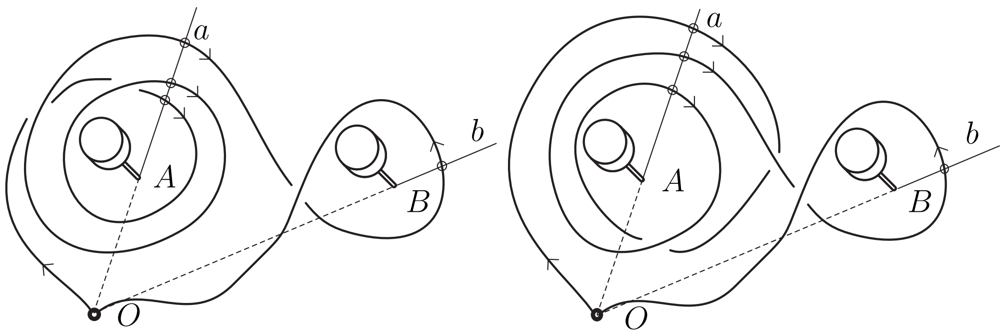

Abbildung 1: Zwei unterschiedliche Schleifen mit dem Wort $AAAB^{-1}$

den Faden nicht zu eng um die Nägel, so kann man einzelne Fadenabschnitte verformen, vergleiche Abbildung 1.

Wann sind aber zwei Schleifen *im Wesentlichen gleich*? Das zu erkennen ist schon eine Kunst für sich und hängt davon ab, welches Problem man behandeln möchte! Anscheinend ist für unser Problem nur wichtig, in welcher Reihenfolge und wie herum die Schnur um die beiden Nägel geschlungen wird – kann man zwei Schleifen ineinander deformieren, *ohne* die Schnur über einen der Nägel zu heben, kommt im Wesentlichen der gleiche Schnurverlauf dabei heraus. Zwei ineinander deformierbare Schleifen nennen wir deswegen *äquivalent* oder *gleichwertig*. Anschaulich ist sofort klar, dass bei einer Schleife, bei der die Schnur nur in einer kleinen Kreisscheibe verläuft, die keinen der beiden Nägel enthält, das Bild herunterfallen muss. Wir sagen ab jetzt: Die Schleife ist auf den *Mittelpunkt der Kreisscheibe zusammenziehbar* oder kurz *zusammenziehbar* genau dann, wenn sie zu so einem Knäul innerhalb einer Kreischeibe, die keinen Nagel enthält, äquivalent ist. Die Gesamtheit aller Schleifen wird nun durch den Begriff der Äquivalenz unterteilt in „Mannschaften“ zueinander äquivalenter Schleifen.[1] Das heißt, zwei Schleifen gehören zur selben Mannschaft genau dann, wenn sie zueinander äquivalent sind. Eine solche „Mannschaft“ nennt der Mathematiker eine *Äquivalenzklasse*, wir nennen sie in dieser Situation lieber *Deformationsklasse*.

Andererseits: Ist das Bild heruntergefallen, kann man die Schnur so deformieren, dass sie in einer kleinen Kreisscheibe enthalten ist, die keinen der Nägel enthält – vorausgesetzt die Schnur ist nicht so lang, dass das Bild den Boden berühren kann, wenn die Schnur noch um einen Nagel gewickelt ist. Wir verschärfen und präzisieren daher unser Problem 1.1:

[1]Das ist sehr nützlich, weil es hilft den Überblick zu bewahren – bei einer Fußball-WM gibt es hunderte von Spielern, aber nur einige wenige Mannschaften. Für Vieles braucht man gar nicht jeden einzelnen Spieler zu kennen, sondern nur die Mannschaften – im Wesentlichen interessiert ja nur, welche Mannschaft gewinnt; welcher Spieler das Siegtor schießt ist im Vergleich dazu von zweitrangiger Bedeutung.

Problem 1.2 Gesucht ist eine nicht zuammenziehbare Schleife um A und B, die zusammenziehbar wird, wenn man A oder B entfernt.

Wir machen uns hier das Leben nur scheinbar schwerer. Wir werden sehen, dass es auch für dieses verschärfte Problem eine Lösung gibt. Dadurch wird dann auch Problem 1.1 gelöst werden. Außerdem kommen wir dadurch einem erstaunlichen mathematischen Sachverhalt auf die Schliche. Aber dazu später mehr.

Wir wollten unsere Schleifen kodieren. Daher bezeichnen wir den einen Nagel mit A und den anderen mit B und zeichnen auf der Schnur eine Richtung aus, etwa indem wir das eine Ende der Schnur als *Anfang* bezeichnen und das andere als das *Ende*. Außerdem wählen wir einen von A und B verschiedenen Punkt O, den *Basispunkt* aus. Wir werden nun nur noch Schleifen betrachten, die Anfang und Ende bei O haben. Hat man die Schnur irgendwie um die beiden Nägel gewickelt und Anfang und Ende am Punkt O an der Wand zusammengeführt, kann man vom Anfang aus entlang der Schnur bis zum Ende laufen und verfolgen, um welche Nägel man wie herum läuft. Dazu kann man die von O abgewandten, von A bzw. B ausgehenden Strahlen a und b auf den Geraden OA bzw. OB als Hilfslinien verwenden (vgl. Abbildung 1): Kreuzt man a, während man im Uhrzeigersinn um A läuft, notiert man sich ein A und falls man im Gegenuhrzeigersinn um A läuft, notiert man sich ein A^{-1}. Ebenso für B: Um B im Uhrzeigersinn gibt ein B, im Gegenuhrzeigersinn um B gibt ein B^{-1}. Notiert man sich dies also von links nach rechts, während man mit dem Finger die Schnur entlang fährt, erhält man, schließlich wieder bei O angekommen, ein *Wort* in den *Buchstaben* A, B, A^{-1} und B^{-1}. Wendet man diese Verfahren z. B. auf Abbildung 1 an, so erkennt man, dass in beiden Bildern $AAAB^{-1}$ dargestellt wird. Natürlich muss man auch den Fall betrachten, dass weder a noch b gekreuzt werden: Man erhält das *leere Wort*. Weil das so schwierig darzustellen ist, bezeichnen wir es einfach mit 1. Klar ist: Wird eine Schleife durch eine 1 beschrieben, so fällt das Bild sicherlich herunter.

Aufgabe 1.3 Gibt es zusammenziehbare Schleifen, die nicht durch eine 1 beschrieben werden? Zeichne und überprüfe Schleifen für die Wörter

$$AA^{-1},\ A^{-1}A,\ BB^{-1},\ B^{-1}B,\ AAA^{-1}A^{-1},\ BAA^{-1}B^{-1},\dots$$

an einem Modell darauf, ob sie zusammenziehbar sind.

Sicherlich gibt es zu einem Wort unendlich viele dazugehörige Schleifen: Man kann eine gegebene Schleife ja auf die unterschiedlichsten Weisen verformen. Das ist nicht weiter schlimm, ist sogar sehr hilfreich, wenn unsere Kodierung die wesentlichen Informationen beinhaltet. Wir müssen daher überprüfen, ob zu äquivalenten Schleifen auch dasselbe Wort gehört. Dem ist nicht so, wie man in Aufgabe 1.3 merkt: Es sind 1 und AA^{-1} verschiedene Wörter, aber dazugehörige Schleifen sind zusammenziehbar und damit stets äquivalent. Was tun? Man sagt nun einfach, die Wörter 1 und AA^{-1} sind auch *äquivalent*. Genauer: Wir führen jetzt auch auf der Gesamtheit der Wörter einen Begriff der Äquivalenz ein und sagen 1 sei zu AA^{-1}, $A^{-1}A$, BB^{-1} und $B^{-1}B$ äquivalent. Wir schreiben dann einfach $1 = AA^{-1}$ usw. Wir dürfen also A gegen A^{-1} *kürzen*, wenn sie nebeneinanderstehen. Dies ist so ähnlich, wie wir das bei den Brüchen gelernt haben: $\frac{3}{7} = 3 \cdot 7^{-1}$ und $\frac{15}{35} = 15 \cdot 35^{-1}$ sind zwar verschieden, wenn man ganz naiv nur das Zahlenpaar aus Zähler und Nenner betrachtet, aber sie beschreiben beide dieselbe rationale Zahl. Genauso beschreiben $ABBB^{-1}ABA^{-1}AA$ und $ABABA$ dieselbe Deformationsklasse. Doch Vorsicht! Für Brüche gilt $3 \cdot 7^{-1} = 7^{-1} \cdot 3$, also das *Kommutativgesetz*. Das braucht hier nicht zu gelten: $A^{-1}B$ und BA^{-1} sind nicht zueinander äquivalent: Wäre dem so, müsste eine durch das Wort $ABA^{-1}B^{-1}$ beschriebene Schleife zusammenziehbar sein, denn dann könnte man rechnen(!)

$$ABA^{-1}B^{-1} = AA^{-1}BB^{-1} = AA^{-1} = 1.$$

Wie man aber leicht an einem Modell ausprobiert, ist eine Schleife mit dem Wort $ABA^{-1}B^{-1}$ nicht zusammenziehbar. Wir können also schon ein wenig am Wort zu einer Schleife ablesen, ob die Schleife zusammenziehbar ist. Das werden wir später auch noch ausbauen.

Was passiert eigentlich, wenn man einen der Nägel herauszieht? Hat man eine Schleife mit dem Wort in A, B, A^{-1}, B^{-1}, und zieht den Nagel B heraus, muss man sämtliche B und B^{-1} im Wort steichen. Dann kann man ziemliche leicht sehen, ob die Schleife zusammenziehbar ist: Man kürzt im gebliebenen Wort solange A gegen A^{-1}, bis A oder A^{-1} nicht mehr im gekürzten Wort vorkommt. Kann man das Wort zum leeren Wort 1 kürzen, so ist die Schleife nach Entfernen von B zusammenziehbar und das Bild fällt runter. Kann man das Wort nicht zu 1 kürzen, kann das Bild nicht herunterfallen. Bleibt zum Beispiel AAA übrig, so ist die Schnur noch immer drei mal im Uhrzeigersinn um den Nagel A gewickelt und das Bild hängt deswegen noch am Nagel A. Analog geht man vor, wenn man Nagel A herauszieht.

Wir müssen also lediglich ein Wort in A, B, A^{-1} und B^{-1} finden, das sich nicht zu 1 kürzen lässt, aber nach Streichen von A oder B schon. Wie wäre es mit dem Wort $ABA^{-1}B^{-1}$? Dies lässt sich nicht zu 1 kürzen, und dass die zugehörige Schleife nicht zusammenziehbar ist, haben wir eben gerade schon gesehen. Streicht man aber alle A in dem Wort, bleibt BB^{-1}; streicht man alle B, so bleibt AA^{-1}. Wir sehen: In beiden Fällen sind dazugehörige Schleifen zusammenziehbar. Das ist ein guter Kandidat für eine Lösung!

Aufgabe 1.4 Probiere an einem Modell aus, dass $ABA^{-1}B^{-1}$ in der Tat eine Lösung für Problem 1.2 ist!

Aufgabe 1.5 Herrn X ist die Sache mit nur zwei Nägeln auch noch zu unsicher: Gar zu leicht könnte seine Tante die vermeintliche Verschwendung übersehen.

Kann Herr X dem abhelfen, indem er drei Nägel A, B, C verwendet und damit mehr Aufsehen erzeugt? Oder vier? Kann man das Bild auch an N Nägel hängen, so dass es herunterfällt, wenn man auch nur einen einzigen Nagel herauszieht? Für welche N geht es? Für welche nicht? (Physikalische Effekte wie Reibung sind dabei außen vor zu lassen…)

2 Algebraische Topologie

2.1 Weitergehende Beobachtungen

Wir haben im letzten Abschnitt schon ein paar tolle Erkenntnisse gewonnen, indem wir unser Anfangsproblem gelöst haben. Vor allem aber haben wir auch eine Sprache gewonnen, mit der wir Schleifen beschreiben können, und wir wollen diese Sprache noch etwas weiter entwickeln.

Wir abstrahieren zunächst die Situation. Die Wand ersetzen wir durch die Ebene $\mathbb{R}^2$, die Nägel durch die Punkte A und B in der Ebene. Außerdem wählen wir wieder einen von A und B verschiedenen Basispunkt O aus. Eine *Schleife* γ (an O) in $\mathbb{R}^2$ ist eine orientierte Kurve in der Ebene, die Anfangs- und Endpunkt bei O hat. Genauer: Eine Kurve γ ist eine Abbildung, die das Intervall $[0,1]$ in die Ebene abbildet, das heißt für jedes t mit $0 \leq t \leq 1$ ist $\gamma(t)$ ein Punkt in der Ebene. Man kann sich das t als einen Zeitparameter vorstellen, das heißt, $\gamma(t)$ ist ein Punkt, der sich in der Ebene bewegt. Wir verlangen, dass sich γ „vernünftig" verhält; wir lassen nur Kurven zu, die man auf ein Blatt Papier malen kann, ohne den Stift abzusetzen. Eine Schleife an O ist dann eine Kurve, so dass der *Anfangspunkt* $\gamma(0)$ und der *Endpunkt* $\gamma(1)$ beide auf O liegen. Orientiert bedeutet einfach nur, dass wir uns die Durchlaufrichtung merken. Entfernen wir die beiden Punkte A und B aus der Ebene $\mathbb{R}^2$, so nennen wir den verbleibenden Raum $\mathbb{R}^2 - \{A, B\}$. Dann sind die Schleifen um A und B, wie wir sie eingangs untersucht haben, gerade Schleifen in $\mathbb{R}^2 - \{A, B\}$, das heißt, die Schleifen in der Ebene, die weder durch A noch durch B verlaufen.

Wir sagen nach wir vor, zwei Schleifen γ, δ in $\mathbb{R}^2 - \{A, B\}$ seien *äquivalent*, wenn sie sich ineinander deformieren lassen. Das wollen wir genau untersuchen und sagen: Eine *Deformation* von γ nach δ ist eine „gute" Abbildung H vom Einheitsquadrat $[0,1] \times [0,1]$ nach $\mathbb{R}^2 - \{A, B\}$, so dass gilt:

i) $H(0, s) = H(1, s) = O$ für alle s aus $[0,1]$.
ii) $H(t, 0) = \gamma(t)$ für alle t aus $[0,1]$.
iii) $H(t, 1) = \delta(t)$ für alle t aus $[0,1]$.

Das ist natürlich etwas erläuterungsbedürftig. Die Abbildung H bildet also das Einheitsquadrat nach $\mathbb{R}^2 - \{A, B\}$ ab. Die Bedingung i) bedeutet dabei, dass die linke und die rechte Seite des Quadrates auf den Punkt O abgebildet werden. Die Bedingung ii) besagt, dass die Grundseite des Einheitsquadrates auf die Kurve γ abgebildet wird und wegen Bedingung iii) wird die obere Seite auf die Kurve δ abgebildet. Für jedes s ist dann die Abbildung $\gamma_s\colon t \mapsto H(t, s)$ eine Kurve in $\mathbb{R}^2 - \{A, B\}$, und wenn man den Parameter s variiert, verändert sich diese Kurve dynamisch. „Gut" heißt dabei, dass einerseits die Kurve γ_s für jedes s eine „gute" Kurve ist, andererseits auch, dass sich die Kurve γ_s bei Variation von s schön gleichmäßig verändert – plötzliche Sprünge sind nicht erlaubt. Solche

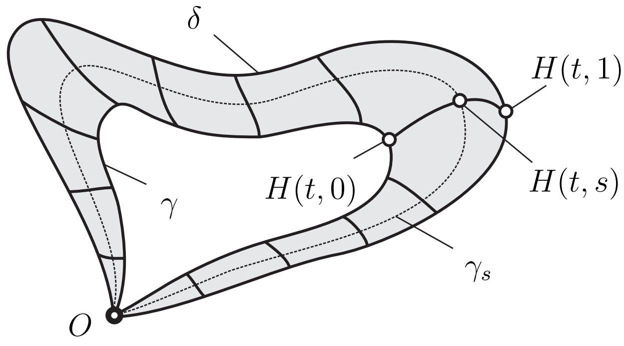

Abbildung 2: Eine Deformation H von γ nach δ.

Abbildungen nennen Mathematiker *stetig*. Man kann sich H auch als eine Vorschrift vorstellen, wie man zwei gegenüberliegende Seiten eines Tuches mit den Kurven γ und δ zu vernähen hat. Dabei werden dann die jeweils anderen beiden Seiten jeweils zusammengerafft und mit dem Punkt O verheftet (vgl. Abbildung 2). Eine Schleife γ, die äquivalent ist zur konstanten Schleife $\kappa_O(t) = O$ nennen wir *zusammenziehbar*.

Unsere Definition der Deformationen spiegelt ungefähr das wider, was man sich so unter „Deformation“ eines Gummibandes vorstellt: neben dem Verschieben, was man auch mit einer festen Schnur machen kann, kann man Gummibänder zusätzlich in die Länge ziehen. Natürlich hinkt der Vergleich ein wenig, da man auch Gummibänder nicht beliebig weit dehnen kann (was wir mit Schleifen allerdings machen dürfen). Man kann sich eine Schleife auch vorstellen wie ein Lasso, das man in den Raum $\mathbb{R}^2 - \{A, B\}$ geworfen hat; wenn man weder den Punkt A noch den Punkt B „eingefangen“ hat, kann man das Lasso einholen und die Schlinge des Lassos zu einem Punkt zusammenziehen.

Wir erinnern uns daran, dass dieser Äquivalenzbegriff die Gesamtheit der Schleifen an O in Deformationsklassen einteilt. Für eine gegebene Schleife γ bezeichnet man die Deformationsklasse von γ mit $[\gamma]$ und man sagt auch, γ ist ein *Vertreter* der Deformationsklasse $[\gamma]$. Zwei Kurven γ und δ sind also genau dann ineinander deformierbar, wenn $[\gamma] = [\delta]$. Die Gesamtheit aller Deformationsklassen von Schleifen in $\mathbb{R}^2 - \{A, B\}$ an O bezeichnet man traditionell mit $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{A, B\}, O)$; die Deformationsklasse der zusammenziehbaren Schleifen mit 1.

Wir könnten statt $\mathbb{R}^2 - \{A, B\}$ einen beliebigen anderen Raum M benutzen, in dem wir „schöne“ Schleifen an einem Basispunkt O betrachten können.[2] Wir hätten statt dessen auch $\mathbb{R}^2$ selbst oder $\mathbb{R}^2 - \{A, B, C, \ldots\}$ mit beliebig vielen

[2]Für die Erfahreneren: „Schön“ bedeutet bei uns *stetig*. Das heißt, wir können beliebige *topologische Räume M* benutzen.

Punkten $A, B, C, \ldots$ aus $\mathbb{R}^2$ betrachten können. Geeignet sind alle (Ober-)Flächen wie zum Beispiel die Oberfläche eines Krapfens, eines Donuts, einer Bretzel... [3], denn auf diesen kann man mit einem Stift (oder mit Lebensmittelfarbe) malen und also sagen, was „schöne“ Kurven sind. Aber auch der dreidimensionale Raum $\mathbb{R}^3$ oder Teilräume wie $\mathbb{R}^3 - \{A\}$ oder $\mathbb{R}^3 -$ Sphäre oder Ähnliches sind geeignet. Wir sagen dann einfach „schöne“ Kurven sind die, an denen eine Mücke entlang fliegen kann.[4] Ganz wichtig bei dieser Verallgemeinerung ist, dass sowohl Schleifen als auch Deformationen nur nach M abbilden dürfen: Im Fall $M = \mathbb{R}^2 - \{A, B\}$ durften ja die Schleife weder durch A noch durch B verlaufen – sonst wäre jede Schleife zusammenziehbar gewesen. Dass es nicht-zusammenziehbare Schleifen gibt, ist aber gerade das Reizvolle! Zum Beispiel ist jede Schleife in $\mathbb{R}^2$ zusammenziehbar; in $\mathbb{R}^2 - \{A\}$ gibt es aber Schleifen, die nicht zusammenziehbar sind. Daran kann man schon sehen, dass die Ebene $\mathbb{R}^2$ und die einfach gelochte Ebene $\mathbb{R}^2 - \{A\}$ wesentlich voneinander verschieden sind. Wir gehen darauf in Abschnitt 2.5 weiter ein.

Zunächst wollen wir aber sehen, dass $\pi_1(M, O)$ eine ganz außerordentlich schöne Struktur besitzt, nämlich die Struktur einer *Gruppe*. Dazu müssen wir uns aber erst schlau machen und lernen, was eine Gruppe ist.

2.2 Gruppen

Die landläufige Meinung ist ja, dass Mathematik allein darin besteht, Zahlenkolonnen zu manipulieren. Dem ist ganz und gar nicht so. Es geht viel öfter darum, Kolonnen *abstrakter* Objekte nach gewissen Regeln zu manipulieren bzw. Regeln für diese Manipulationen aufzudecken. Besonders erfreut ist ein Mathematiker, wenn er zeigen kann, dass sich eine Ansammlung von Objekten wie eine *Gruppe* verhält. Eine Gruppe ist eine Ansammlung von Objekten und von bestimmten Regeln, wie diese Objekte miteinander interagieren. Dies führt dazu, dass man in einer Gruppe tatsächlich *rechnen* kann. In diesem Sinne sind Gruppen schon eine Verallgemeinerung der Zahlen. Gruppen tauchen an allen möglichen und unmöglichen Stellen in der Mathematik auf – auch und besonders in der Geometrie. Die Begriff der Gruppe zählt daher zu den wichtigsten Strukturen in der Mathematik, so wichtig, dass es ein eigenes Fachgebiet – die Gruppentheorie – gibt, das sich ausschließlich mit (abstrakten) Gruppen beschäftigt. Wir wollen aber Gruppen auch zu etwas benutzen und deswegen schauen wir uns nur die Definition und ein paar Beispiele an:

Definition 2.1 Eine *Gruppe* $(G, \odot)$ ist eine Menge G und eine Verknüpfung $\odot$ zwischen den Elementen der Gruppe, so dass für beliebige Elemente g, h aus G

[3] Topologen haben – wie man leicht merkt – eine Vorliebe für Backwerk.

[4] Besonders wichtig ist dabei, dass die Flugbahn einer Mücke keine Sprünge aufweist.

stets auch wieder $g \odot h$ ein Element von G ist und zusätzlich den folgenden Regeln gehorcht:

i) Es gibt ein Element 1 in G, so dass für alle g in G gilt: $1 \odot g = g \odot 1 = 1$. Man nennt 1 ein *Einselement* in G.
ii) Zu jedem Element g in G gibt es genau ein Element g^{-1} in G, so dass $g \odot g^{-1} = g^{-1} \odot g = 1$ gilt. Man nennt g^{-1} ein *Inverses* zu g.
iii) Für je drei Elemente g_1, g_2, g_3 aus G gilt stets $(g_1 \odot g_2) \odot g_3 = g_1 \odot (g_2 \odot g_3)$. Man nennt dies auch das *Assoziativgesetz*.

Definition 2.2 Sei $(G, \odot)$ eine Gruppe. Gilt für beliebige g und h in G stets $g \odot h = h \odot g$, so sagt man, die Gruppe $(G, \odot)$ erfülle das *Kommutativgesetz*. Gruppen, die das Kommutativgesetz erfüllen, nennt man zu Ehren des norwegischen Mathematikers Niels Henrik Abel *abelsche Gruppen*.

Sind 1 und $1'$ Einselemente in G, so gilt $1 = 1 \odot 1' = 1'$ und deshalb gibt es stets genau ein Einselement. Ähnlich zeigt man: Zu jedem g in G gibt es genau ein Inverses: Seien h und h' Inverse zu g, denn gilt

$$h = h \odot 1 = h \odot (g \odot h') = (h \odot g) \odot h' = 1 \odot h' = h'.$$

Man beachte, dass hierbei alle Punkte i)–iii) der Definition einer Gruppe verwendet wurden! Sind g und h Elemente von G, so ist $(g \odot h)^{-1} = h^{-1} \odot g^{-1}$. Dies sieht man mit dem Assoziativgesetz so ein:

$$(g \odot h) \odot (h^{-1} \odot g^{-1}) = g \odot (h \odot h^{-1}) \odot g^{-1} = g \odot g^{-1} = 1.$$

Beispiel 2.3 Ein paar Beispiele von Gruppen sollten dem Leser schon bekannt sein:

– Die ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +)$ bilden eine abelsche Gruppe.
– Auch $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ sind abelsche Gruppen. Insofern kann man Gruppen als Verallgemeinerungen der Zahlen auffassen.
– Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ohne die 0 bilden mit der Multiplikation die abelsche Gruppe $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$.
– In $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ ist die Gruppe $(\mathbb{R}_+ - \{0\}, \cdot)$ der positiven, von 0 verschiedenen reellen Zahlen enthalten.
– Die Menge $\{0, 1, 2, \ldots n - 1\}$ mit $+_n$ ist eine abelsche Gruppe, wobei $a +_n b$ den Rest von $a + b$ nach Teilen durch n bedeute.
– Die Menge der Bewegungen der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ ist eine nicht-abelsche Gruppe mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung. Für einen festen Punkt P in $\mathbb{R}^2$ ist darin die abelsche Gruppe der Drehungen um P enthalten.

Aufgabe 2.4
i) Warum ist $(\mathbb{N}, +)$ keine Gruppe?

ii) Warum ist $(\mathbb{R}, \cdot)$ keine Gruppe?
iii) Warum ist $(\mathbb{N}, \cdot)$ keine Gruppe?
iv) Warum ist die Menge der Spiegelungen in der Ebene mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung keine Gruppe?

Aufgabe 2.5 Wir betrachten nun die Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ der Paare (n, m) ganzer Zahlen. Für zwei solche Paare (n_1, m_2), (n_2, m_2) defineren wir die Verknüpfung $\oplus$ durch komponentenweise Addition, d. h.:

$$(n_1, m_1) \oplus (n_2, m_2) := (n_1 + n_2, m_1 + m_2).$$

Zeige: $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe mit Einselement $(0, 0)$.

Aufgabe 2.6 (*) Für Leute, die schon ein wenig lineare Algebra kennen: Die Menge $M_n(\mathbb{R})$ der $n \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen mit der Matrizenmultiplikation „$\cdot$" ist *keine* Gruppe – warum? Man bezeichnet mit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ die Menge der *invertierbaren* $n \times n$-Matrizen. Zeige $(\mathrm{GL}_n(R), \cdot)$ ist eine Gruppe. Man nennt sie die *Generelle Lineare Gruppe* (*General Linear group*). Ist sie abelsch?

Aufgabe 2.7 Sei $\mathcal{A} = \{A, A^{-1}, B, B^{-1}, C, C^{-1}, \ldots\}$ eine Alphabet mit $2n$ Elementen. Sei $\mathcal{W}$ die Menge der Wörter mit Buchstaben aus $\mathcal{A}$. Sind x und y Wörter, so definieren wir $x \odot y = xy$ als das Wort, das man erhält, wenn man zunächst x hinschreibt und dann y. Zwei Wörter x, y nennen wir *äquivalent*, wenn das eine aus dem anderen durch Hinzufügen oder Entfernen von Buchstabenfolgen der Art AA^{-1}, $A^{-1}A$, BB^{-1}, $B^{-1}B$, $CC^{-1}, \ldots$ hervorgeht. Die Äquivalenzklasse eines Wortes x bezeichnen wir mit $[x]$ und die Gesamtheit der Äquivalenzklassen mit $\langle \mathcal{A} \rangle$. Überprüfe an einigen Beispielen, dass für Wörter x, x', y, y' mit $[x] = [x']$ und $[y] = [y']$ tatsächlich auch $[x \odot y] = [x' \odot y']$ gilt. Dann kann man die Verknüpfung $[x] \cdot [y] := [x \odot y]$ definieren. Zeige, dass $(\langle \mathcal{A} \rangle, \cdot)$ eine Gruppe ist. Was ist das Einselement in $(\langle \mathcal{A} \rangle, \cdot)$? Was ist $[x]^{-1}$? Ist $(\langle \mathcal{A} \rangle, \cdot)$ abelsch? Die Gruppe $(\langle \mathcal{A} \rangle, \cdot)$ nennt man die *aus dem Alphabet $\mathcal{A}$ frei erzeugte Gruppe.*

2.3 Die Fundamentalgruppe

Wir werden jetzt sehen, dass $\pi_1(M, O)$ die Struktur einer Gruppe besitzt, und gehen dabei in kleinen Schritten vor.

2.3.1 Verknüpfung

Aus zwei Schleifen γ und δ an O kann man eine neue Schleife, die *Verknüpfung* $\gamma * \delta$ von γ mit δ herstellen:

$$\gamma * \delta(t) := \begin{cases} \gamma(2t), & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \delta(2t-1), & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Das muss man sich so vorstellen: Man nimmt den Endpunkt von γ und verheftet ihn mit dem Anfangspunkt von δ; die entstehende Kurve nennen wir $\gamma * \delta$; ihr Anfangspunkt ist der Anfangspunkt von γ und ihr Endpunkt ist der Endpunkt von δ. Läuft man nun mit t von 0 nach 1, so durchläuft man also zunächst γ und danach δ, aber jetzt doppelt so schnell, wie vorher. Da γ und δ beides Schleifen an O waren, ist $\gamma * \delta$ auch wieder eine Schleife an O.

Nimmt man nun Schleifen γ' und δ', die zu γ bzw. δ deformationsäquivalent sind, so behaupten wir, dass $\gamma' * \delta'$ äquivalent ist zu $\gamma * \delta$:

Hilfssatz 2.8 *Sind γ, γ', δ und δ' Schleifen an O, so dass $[\gamma] = [\gamma']$ und $[\delta] = [\delta']$ sind, so gilt*

$$[\gamma * \delta] = [\gamma' * \delta'].$$

Beweis. Sei F eine Deformation von γ nach γ' und G eine Deformation von δ nach δ'. Wir können dann direkt eine Deformation H von $\gamma * \delta$ nach $\gamma' * \delta'$ hinschreiben und zwar:

$$H(t,s) := \begin{cases} F(2t, s), & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G(2t-1, s), & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Es ist dann eine empfehlenswerte Übung, nachzuprüfen, dass H tatsächlich eine Deformation von $\gamma * \delta$ nach $\gamma' * \delta'$ ist. $\square$

Nun können wir auch eine Verknüpfung „$\bullet$“ von Deformationsklassen definieren: Für zwei Deformationsklassen Γ und Δ wählen wir Vertreter γ aus Γ und δ aus Δ und definieren:

$$\Gamma \bullet \Delta := [\gamma * \delta].$$

Wegen des obigen Hilfsatzes hängt $\Gamma \bullet \Delta$ nicht von der Wahl von γ und δ ab – für andere Vertreter γ' und δ' ist $\gamma' * \delta'$ zwar als Schleife von $\gamma * \delta$ verschieden, aber dazu äquivalent.

2.3.2 Einselement

Hilfssatz 2.9 *Sei Γ aus $\pi_1(M, O)$. Dann ist $1 \bullet \Gamma = \Gamma \bullet 1 = \Gamma$.*

Beweis. Wir haben gesehen, dass wir beliebige Vertreter wählen dürfen. Für Γ wählen wir irgendeinen Vertreter und für 1 die konstante Kurve $\kappa_O(t) = O$. Dann ist

$$H(t,s) = \begin{cases} \gamma((1+s)t), & \text{für } 0 \leq t \leq 1 - \frac{s}{2}, \\ O, & \text{für } 1 - \frac{s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine Deformation von γ nach $\gamma * \kappa_O$. Analog geht das für $\kappa_O * \gamma$. $\square$

2.3.3 Inverses

Zu einer Schleife γ betrachte die Schleife γ^{-1}, die definiert wird durch:

$$\gamma^{-1}(t) := \gamma(1-t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Die Schleife γ wird also einfach nur andersherum durchlaufen. Wir behaupten: Sind γ und δ deformationsäquivalent, so sind auch γ^{-1} und δ^{-1} deformationsäquivalent. Außerdem sind $\gamma * \gamma^{-1}$ und $\gamma^{-1} * \gamma$ zusammenziehbar:

Hilfssatz 2.10 *Für Schleifen γ, δ an O gilt:*

i) Aus $[\gamma] = [\delta]$ folgt $[\gamma^{-1}] = [\delta^{-1}]$.
ii) $[\gamma * \gamma^{-1}] = [\gamma^{-1} * \gamma] = 1$.

Beweis. Ist F eine Deformation von γ nach δ, so ist $H(t,s) := F(1-t,s)$ eine Deformation von γ^{-1} nach δ^{-1}. Dies zeigt Punkt i).

Zu Punkt ii): Wir geben eine Deformation H von der konstanten Schleife $\kappa_O(t) = O$ nach $\gamma * \gamma^{-1}$ an:

$$H(t,s) = \begin{cases} \gamma(2ts), & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma((2-2t)s), & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Zur Veranschaulichung der letzten Deformation sollte man sich eine Kurve γ auf ein Blatt Papier zeichnen und für $s = 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0$ die Kurven $\gamma_s \colon t \mapsto H(t,s)$ aufmalen! □

Wir können jetzt auch für eine Deformationsklasse $\mathit{\Gamma}$ ein *Inverses* $\mathit{\Gamma}^{-1}$ angeben: Wähle einen Vertreter γ und setze $\mathit{\Gamma}^{-1} := [\gamma^{-1}]$. Der obige Hilfssatz garantiert, dass $\mathit{\Gamma}^{-1}$ nicht von der Wahl des Vertreters γ abhängt und dass $\mathit{\Gamma} \bullet \mathit{\Gamma}^{-1} = \mathit{\Gamma}^{-1} \bullet \mathit{\Gamma} = 1$ gilt.[5]

2.3.4 Assoziativität

Wenn man mehr als zwei Schleifen verknüpft, muss man aufpassen! Für drei Schleifen γ, δ, ε gilt zum Beispiel

$$(\gamma * \delta) * \varepsilon(t) = \begin{cases} \gamma(4t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ \delta(4t-1), & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \varepsilon(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

[5] Wir sehen hier abermals, dass es ganz günstig sein kann, diverse Objekte nicht zu genau zu unterscheiden. Schließlich ist $\gamma * \gamma^{-1}$ nicht identisch mit der konstanten Schleife an O, aber immerhin dazu äquivalent!

aber

$$\gamma * (\delta * \varepsilon)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \delta(4t-2), & \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4}, \\ \varepsilon(4t-3), & \frac{3}{4} \le t \le 1. \end{cases}$$

Für allgemeine Kurven γ, δ, ε brauchen $(\gamma * \delta) * \varepsilon$ und $\gamma * (\delta * \varepsilon)$ nicht gleich zu sein: Bei $(\gamma * \delta) * \varepsilon$ wird die Kurve γ mit vierfacher Geschwindigkeit durchlaufen, wenn t das Intervall $[0, \frac{1}{4}]$ durchläuft, während bei $\gamma * (\delta * \varepsilon)$ die Kurve γ nur mit doppelter Geschwindigkeit durchlaufen wird, wenn t das Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ durchläuft. Natürlich sind die Bilder der Kurven $(\gamma * \delta) * \varepsilon$ und $\gamma * (\delta * \varepsilon)$ gleich – und das ist eigentlich viel wichtiger. Dadurch, dass wir verschieden parametrisierte Schleifen unterscheiden, haben wir uns sozusagen selbst ein Bein gestellt. Umso besser, dass für die Verknüpfung von Deformationsklassen sowas nicht passiert:

Hilfssatz 2.11 *Für Deformationsklassen Γ, Δ, E gilt:*

$$(\Gamma \bullet \Delta) \bullet E = \Gamma \bullet (\Delta \bullet E).$$

Beweis. Wähle Vertreter γ, δ und ε aus Γ, Δ bzw. E. Wir geben wieder einfach eine Deformation H von $(\gamma * \delta) * \varepsilon$ nach $\gamma * (\delta * \varepsilon)$ an:

$$H(t,s) = \begin{cases} \gamma(2(2-s)t), & 0 \le t \le \frac{1+s}{4}, \\ \delta(4t-1-s), & \frac{1+s}{4} \le t \le \frac{2+s}{4}, \\ \varepsilon(2(1+s)t-1-2s), & \frac{2+s}{4} \le t \le 1. \end{cases}$$ □

Damit ist der Beweis erbracht, dass $(\pi_1(M, O), \bullet)$ um eine *Gruppe* handelt. Man nennt sie die *Fundamentalgruppe* des Raumes M. Eingeführt wurde sie vom französichen Mathematiker und theoretischen Physiker Henri Poincaré um 1895. Der Artikel, in dem Poincaré die Fundamentalgruppe beschreibt, trägt den Namen *Analysis Situs* (Analyse des Ortes). Dies war früher der gebräuchliche Name für die Topologie. Das Bahnbrechende an Poincarés Arbeit ist, dass er durch die Fundamentalgruppe und andere Invarianten topologische Daten (die Gestalt eines Raumes) extrahieren und in algebraische Daten (z. B. in Gruppen) umsetzen konnte. Er stellte in dieser Arbeit auch die berühmte Poincaré Vermutung auf, dass ein „geschlossener“ 3-dimensionaler topologischer Raum, dessen Fundamentalgruppe gleich der trivialen Gruppe $\{1\}$ ist, „gleich“ der 3-dimensionalen Sphere S^3 sei.[6] Diese Vermutung zählt seit dem Jahr 2000 zu den sieben Millenium Vermutungen des Clay Mathematics Institute deren Lösung mit einer Million US-Dollar dotiert ist. Ein Beweis für die Richtigkeit dieser Vermutung wurde im Jahr 2002 vom

[6] Die S^3 ist der Rand der 4-dimensionalen Vollkugel!

russischen Mathematiker Grigori Perelman erbracht. Dafür sollte er 2006 die Fields-Medaille (der „Nobelpreis der Mathematik“) erhalten, die er aber ablehnte.[7]

Bemerkung 2.12 Man nennt einen Raum M, in dem für je zwei Punkte P_0, P_1 aus M stets eine Kurve $\delta\colon [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) = P_0$ und $\gamma(1) = P_1$ existiert, sinnigerweise *zusammenhängend*. Für zusammenhängende Räume M hängt die Fundamentalgruppe *nicht* vom Basispunkt ab: Seien P_0 und P_1 Punkte in M und δ eine Kurve, die sie verbindet. Für jede Schleife γ an P_1 erhält man dann wie folgt eine Schleife γ' an P_0: Man läuft zunächst mit δ von P_0 nach P_1, durchläuft dann γ und läuft anschließend von P_1 zurück nach P_0, indem man δ rückwärts durchläuft. Explizit sieht diese Schleife an P_0 so aus:

$$\gamma'(t) = \begin{cases} \delta(3t), & t \in [0, \frac{1}{3}], \\ \gamma(3t-1), & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ \delta(3-3t), & t \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Hierdurch wird dann die Deformationsklasse $[\gamma]$ auf $[\gamma']$ abgebildet. Man überlegt sich dann recht einfach, dass dies eine 1–1-Relation zwischen $\pi_1(M, P_0)$ und $\pi_1(M, P_1)$ ergibt.

Ist hingegen M nicht zusammenhängend, so hängt die Fundamentalgruppe sehr wohl vom Basispunkt ab. Nimmt man für M zum Beispiel eine Sphäre *und* einen Torus (so, dass sie sich nicht berühren), so ist $\pi_1(M, O) = \{1\}$, wenn O auf der Sphäre liegt, und $\pi_1(M, O) \neq \{1\}$, wenn O auf dem Torus liegt (Die Berechnungen der Fundamentalgruppen von Sphäre und Torus sind im nächsten Abschnitt).

2.4 Beispiele

Wir gehen hier ein paar elementare und prominente Beispiele durch. Kennt man deren Fundamentalgruppe, kann man manchmal auch die Fundamentalgruppe komplizierterer Räume bestimmen, indem man sie aus den elementaren Räumen zusammensetzt.

Beispiel 2.13 (Die Ebene)
Jede Schleife in der Ebene ist zusammenziehbar: Ist $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ eine Schleife an $O = (0,0)$ in der Ebene, so liefert

$$H(t,s) = (sx(t), sy(t))$$

eine Deformation von der konstanten Kurve $\kappa_O(t) = (0,0)$ zu γ. Hieraus folgt, dass es nur eine Deformationsklasse gibt und $\pi_1(\mathbb{R}^2, O) = \{1\}$ sein muss, die Gruppe, die nur aus dem Einselement besteht.

[7] Das Geld der Clay-Stiftung hat er im Übringen auch nicht bekommen, weil er sich bis heute weigert, den Beweis in einer wissenschaftlich anerkannten Zeitschrift zu veröffentlichen, wie es die Bestimmungen zur Preisvergabe vorsehen.

Beispiel 2.14 (Die Kreisscheibe)
Mit D^2 bezeichnen wir die Einheitskreisscheibe in der Ebene $\mathbb{R}^2$.[8] Als Basispunkt O wählen wir den Mittelpunkt. Es ist $\pi_1(D^2, O) = \{1\}$. Dies zeigt man genauso, wie für die Ebene.

Aufgabe 2.15 Bestimme die Fundamentalgruppe des dreidimensionalen Raumes $\mathbb{R}^3$ und der Vollkugel D^3!

Beispiel 2.16 (Die einfach gelochte Ebene)
Für $M = \mathbb{R}^2 - \{A\}$ ist $(\pi_1(M, O), \bullet) = (\mathbb{Z}, +)$. Um dies einzusehen, erinnern wir uns noch einmal an die Kodierung aus Kapitel 1: Für eine Deformationsklasse $\mathit{\Gamma}$ wählen wir einen Vertreter γ und schreiben das dazugehörige Wort mit den Buchstaben A, A^{-1} auf. Dann kürzen wir und brauchen nur noch die verbleibenden A bzw. A^{-1} zu zählen. Bleibt n mal A übrig, so ordnen wir $[\mathit{\Gamma}]$ die ganze Zahl $N(\mathit{\Gamma}) = n$ zu. Bleibt n mal A^{-1} übrig, so ordnen wir $[\mathit{\Gamma}]$ die ganze Zahl $N(\mathit{\Gamma}) = -n$ zu. Die Zahl $N(\mathit{\Gamma})$ gibt gerade an, wie oft (Betrag) und wieherum (Vorzeichen) die Schleife γ um A gewickelt wurde. Da sich die Anzahl der Wicklungen bei Deformation von γ nicht ändert, hängt $N(\mathit{\Gamma})$ nicht vom Vertreter γ ab. Schließlich beobachtet man noch, dass $N(\mathit{\Gamma} \bullet \mathit{\Delta}) = N(\mathit{\Gamma}) + N(\mathit{\Delta})$ ist, dass sich also die Anzahl der Wicklungen addiert, wenn man zwei Schleifen verknüpft.

Beispiel 2.17 (Der Kreisring)
Mit S^1 bezeichnen wir den Kreisring, also den Rand der Einheitskreisscheibe D^2 in der Ebene. Es ist $\pi_1(S^1, O) = (\mathbb{Z}, +)$. Dies sieht man so ein: Wir kennen bereits die Fundamentalgruppe der einfach gelochten Ebene $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$; wir wählen jetzt den Basispunkt von $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ auf dem Rand S^1. Ist $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ eine Schleife an O in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, so können wir sie in die Schleife

$$\delta(t) = \left(\frac{x(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}, \frac{y(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} \right)$$

deformieren, die komplett in S^1 verläuft; die Deformation dafür wird gegeben durch

$$H(t, s) = \left(\frac{x(t)}{(1-s) + s\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}, \frac{y(t)}{(1-s) + s\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} \right).$$

Es ist $H(t, 0) = \gamma(t)$ und $H(t, 1) = \delta(t)$. Außerdem ist $H(t, s) \neq (0, 0)$ für alle t, s zwischen 0 und 1. Man neachte, dass dieses Argument nur funktioniert, weil $\gamma(t) \neq (0, 0)$ für alle t gilt. Andernfalls könnte man δ nicht definieren, weil man

[8] Das D steht für *disc*. Die zwei soll andeuten, dass es sich dabei um die Kreisscheibe in der Ebene $\mathbb{R}^2$ handelt; D^3 ist im Vergleich dazu die „Kreisscheibe“ im Raum, also die Einheits(voll)kugel.

sonst durch 0 teilen würde. Für jedes $[\gamma]$ aus $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, O)$ gibt es also einen Vertreter δ, so dass $[\delta]$ in $\pi_1(S^1, O)$ liegt. Umgekehrt ist jede Schleife in S^1 an O natürlich auch eine Schleife in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Die Fundamentalgruppen von $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, O)$ und $\pi_1(S^1, O)$ sind also gleich.

Beispiel 2.18 (Die zweifach gelochte Ebene)
Für $M = \mathbb{R}^2 - \{A, B\}$ ist $(\pi_1(M, O), \bullet)$ gleich der aus $\mathcal{A} = \{A, A^{-1}, B, B^{-1}\}$ frei erzeugten Gruppe $(\langle\mathcal{A}\rangle, \odot)$ (vgl. Aufgabe 2.7). Dies haben wir ja schon im ersten Kapitel gesehen.

Aufgabe 2.19 (Die mehrfach gelochte Ebene)

i) Gib die Fundamentalgruppe für $M = \mathbb{R}^2 - \{A, B, C\}$ für drei verschiedene Punkte A, B, C in der Ebene an!
ii) Gib die Fundamentalgruppe für $M = \mathbb{R}^2 - \{A, B, C, D\}$ für vier verschiedene Punkte A, B, C, D in der Ebene an!
iii) Gib die Fundamentalgruppe für $M = \mathbb{R}^2 - \{A_1, \ldots, A_n\}$ für n verschiedene Punkte $A_1, \ldots, A_n$ in der Ebene an!
iv) Wie ordnet sich 2.16 hierin ein?
v) Aufgabe 1.5 könnte bisher zu schwer gewesen sein. Mit dem Wissen um die Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}^2 - \{A_1, \ldots, A_n\}$ sollte sie nin aber machbar sein. Tipp: Man benutze die Lösung von n für $n + 1$!

Beispiel 2.20 (Die Sphäre)
Mit S^2 bezeichnen wir die Oberfläche der Einheitskugel im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$.[9] Wir wählen den Südpol als Basispunkt O. Sei $[\Gamma]$ eine beliebige Deformationsklasse einer Schleife an O. Darin finden wir immer auch einen Vertreter γ, der eine kleine Scheibe D um den Nordpol nicht trifft, indem wir ihn gegebenenfalls ein wenig deformieren. Nimmt man die Scheibe D aus der Sphäre heraus, ist das, was übrig bleibt, in eine Kreisscheibe deformierbar. Damit ist γ also eine Schleife in der Kreisscheibe und deshalb auf O zusammenziehbar, wie wir in 2.14 gesehen haben. Also ist $\pi_1(S^2, O) = \{1\}$.

Beispiel 2.21 (Der Torus)
Den *Torus* $\mathbb{T}^2$ kann man am besten als die Oberfläche eines Donuts beschreiben (vgl. Abbildung 4.1). Aus dem Einheitsquadrat kann man ihn erhalten, wenn man zwei gegenüberliegende Kanten so verklebt, dass zunächst ein Schlauch entsteht. Dann verklebt man die gegenüber liegenden Öffnungen, so dass eine Art Reifen entsteht. Das machen wir uns zur Bestimmung der Fundamentalgruppe des Torus zunutze. Wir lösen zunächst das Innere des Einheitsquadrates heraus, so dass nur

[9] Das S steht dabei für für „Sphäre“, die Zwei dafür, dass es sich hierbei um die flächenartige Sphäre handelt (die Oberfläche ist zweidimensional). Vergleiche damit die Bezeichnung S^1 des Einheitskreisringes!

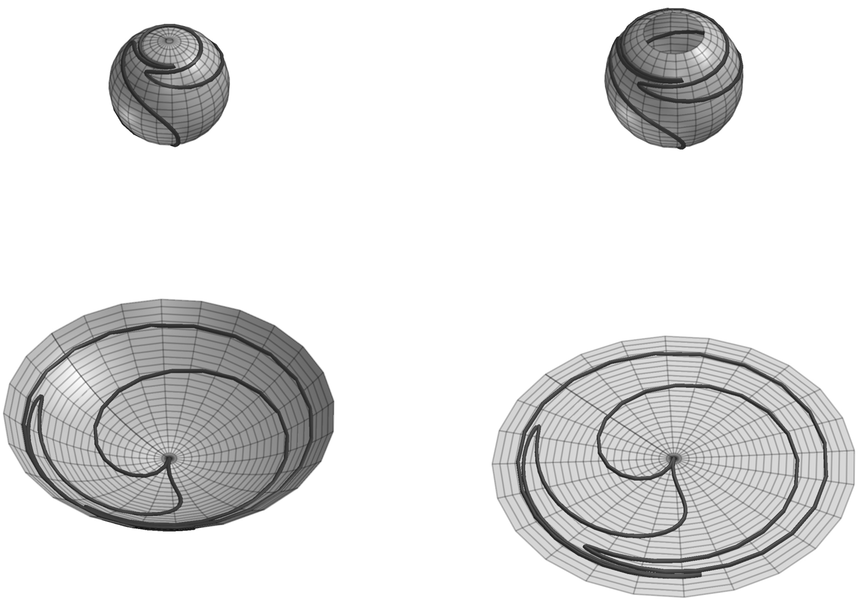

Abbildung 3: Entfernt man eine kleine Scheibe am Nordpol aus der Sphäre, so lässt sich der Rest in eine Kreisscheibe deformieren.

der Rand übrig bleibt (vgl. Abbildung 4). Zurück bleiben zwei Kreisringe, die an einem Punkt zusammengeklebt sind; wir schreiben dafür als Abkürzung $S^1 \vee S^1$. Die Fundamentalgruppe von $S^1 \vee S^1$ kennen wir: Wir nutzen den Schnittpunkt O der beiden Kreisringe als Basispunkt O. Außerdem wählen wir zwei Deformationsklassen A, B von Schleifen wie in Abbildung 4.1 aus. Es ist $\pi_1(S^1 \vee S^1, O)$ die aus A und B frei erzeugt Gruppe (vgl. Aufgabe 2.7 und Beispiel 2.18). Läuft man in Abbildung 4.4 einmal im Gegenuhrzeigersinn um das Quadrat, so entspricht diese Kurve nach dem Verkleben mit $S^1 \vee S^1$ genau der Schleife $ABA^{-1}B^{-1}$. In $S^1 \vee S^1$ ist $ABA^{-1}B^{-1}$ *nicht* zusammenziehbar, in $\mathbb{T}^2$ aber *schon*, weil man sie dort über das eingeklebte Quadrat zusammenziehen kann (jede Schleife im Quadrat kann zusammengezogen werden). Das heißt aber, da man jedes Element aus $\pi_1(\mathbb{T}^2, O)$ als Wort in den Buchstaben A, B schreiben kann, und weil $AB = BA$ gilt, dass $\pi_1(\mathbb{T}^2, O)$ abelsch ist. Jedes Element kann also als $A^n B^m$ mit ganzen Zahlen n, m geschrieben werden und man darf $A^{n_1} B^{m_1} A^{n_2} B^{m_2} = A^{n_1+n_2} B^{m_1+m_2}$ schreiben. Dann braucht man auch A und B nicht mehr ausschreiben und kürzt ab als $A^n B^m = (n, m)$. Man sieht nun leicht ein, dass $\pi_1(\mathbb{T}^2, O) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ gelten muss (vgl. Aufgabe 2.5) .

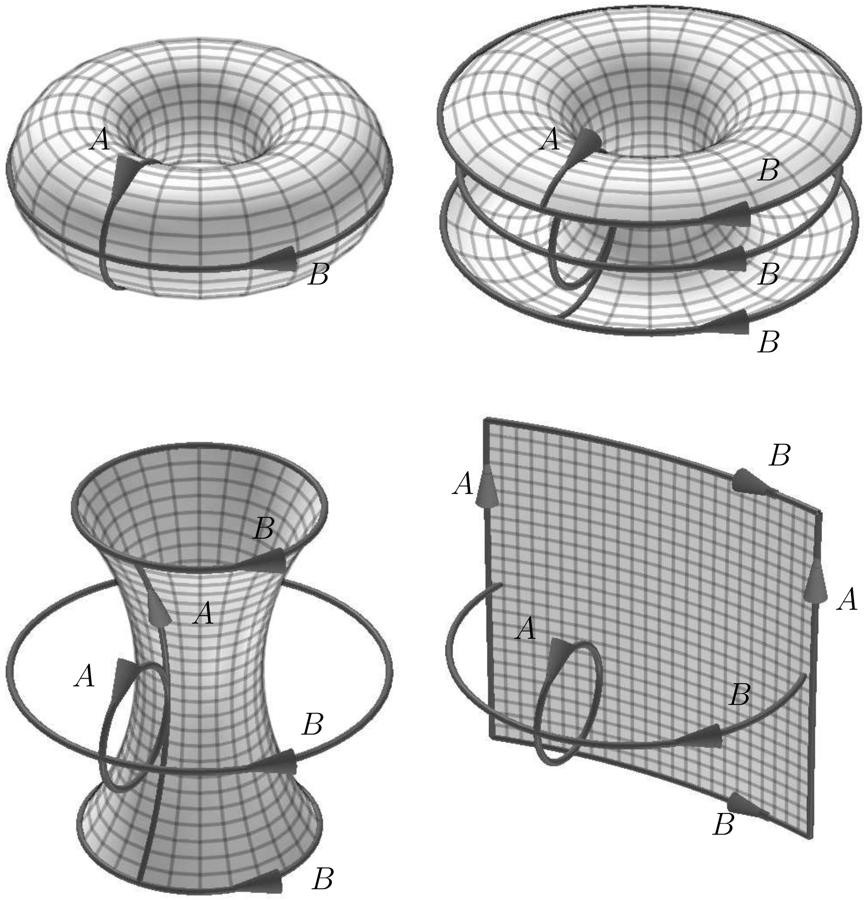

Abbildung 4: Der Torus wird zerschnitten und aufgebogen.

2.5 Die Fundamentalgruppe als Invariante

Wir haben zu jedem geeigneten Raum M eine Gruppe $\pi_1(M, O)$ konstruiert. In der Mathematik ist es üblich, dann auch zu untersuchen, in wieweit sich ein M zugeordnetes Objekt verändert, wenn man M verändert. In der Tat ist π_1 eine *topologische Invariante*. Die Topologie[10] ist ein Zweig in der Mathematik, der aus der Geometrie erwachsen ist, in der geometrische Objekte nicht voneinander unterschieden werden, wenn sie ineinander deformiert werden können (eben diese Unterscheidung haben wir ja angefangen zu unterlassen). Man nennt π_1 eine topologische Invariante, denn für zwei Objekte M_1 und M_2, die ineinander deformiert werden können (z. B. der Kreisring und die einfach gelochte Ebene), sind

[10] *Topos* ist griechisch und bedeutet *Ort*; *Topologie* bedeutet also in etwa „Lehre vom Ort".

$\pi_1(M_1, O_1)$ und $\pi_1(M_2, O_2)$ gleich. Dies nutzt man in der Regel so: Sind $\pi_1(M_1, O_1)$ und $\pi_1(M_2, O_2)$ verschieden, so kann man M_1 nicht in M_2 deformieren! Das heißt, π_1 kann auch tatsächlich wesentlich verschiedene Objekte unterscheiden.[11] In den Beispielen haben wir gesehen, dass unsere Invariante π_1, die Fundamentalgruppe, einige Räume unterscheiden kann: Die Sphäre und der Torus haben unterschiedliche Fundamentalgruppen. Wir haben auch gesehen, dass Kreisscheibe und Kreisring nicht ineinander deformiert werden können. Das werden wir später noch einmal benutzen.

Andererseits haben wir auch gesehen, dass unsere Invariante nicht perfekt ist: Sowohl die Ebene als auch die Sphäre haben Fundamentalgruppe $\{1\}$. Trotzdem lassen sie sich nicht ineinander deformieren. Das kann man allerdings auch mit Hilfe der Fundamentalgruppe einsehen: Für einen beliebigen Punkt A in der Ebene $\mathbb{R}^2$ wissen wir bereits $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{A\}) = \mathbb{Z}$. Nimmt man aber aus der Sphäre S^2 einen Punkt, zum Beispiel den Nordpol N heraus, so haben wir schon gesehen, dass sich der Rest in eine Kreisscheibe verbiegen lässt (vgl. Abbildung 3), also die Fundamentalgruppe $\pi_1(S^2 - \{N\}) = \{1\}$ hat.

Insbesondere über Flächen weiß man sehr viel, wenn man ihre Fundamentalgruppe kennt. Wie man sie unter Umständen berechnen kann, werden wir im nächsten Abschnitt sehen.

2.6 Der Satz von Seifert und van Kampen

In diesem Abschnitt wollen wir veranschaulichen, wie man die Fundamentalgruppe eines Raumes, der aus zwei Räumen mit bekannter Fundamentalgruppe zusammengeklebt wird, berechnet werden kann. Seien dazu U, W zwei Räume und W liege ganz in U. Wähle einen Basispunkt O in W (und damit in U). Jede Schleife γ in W an O ist dann auch eine Schleife in U an O. Wir bezeichnen dann mit $\iota_U([\gamma])$ die zu γ gehörende Deformationsklasse von γ in U. Aufgepasst: Ist zum Beispiel $W = S^1$ der Kreisring und $U = \mathbb{R}^2$ und sei γ eine Schleife in S^1 an $(1, 0)$, die einmal um den Kreis herumläuft, so ist $[\gamma]$ nicht das Einselement in $\pi_1(S^1, (1, 0))$, aber da $\pi_1(\mathbb{R}^2, (1, 0)) = \{1\}$, ist natürlich $\iota_{\mathbb{R}^2}([\gamma]) = 1$.

Satz 2.22 *Seien M, U, V zusammenhängende Räume, so dass $M = U \cup V$, das heißt M ist die Vereinigung von U und V, sei $W = U \cap V$, die Schnittmenge von U und V ebenfalls zusammenhängend und sei O in W. Dann erhält man $\pi_1(M, O)$ aus $\pi_1(U, O)$, $\pi_1(V, O)$ und $\pi_1(U \cap V, O)$ wie folgt: Jedes Element aus $\pi_1(M, O)$ kann (nicht notwendig eindeutig) dargestellt werden als Wort $A_1B_1A_2B_2 \dots A_kB_k$ mit A_i aus $\pi_1(U, O)$ und B_i aus $\pi_1(V, O)$. Die Gruppenverknüpfung ist gegeben durch Aneinanderhängen von Wörtern. Dabei sind Wörter der Form $\iota_U(C)(\iota_V(C))^{-1}$ als 1 zu betrachten für C aus $\pi_1(W, O)$.*

[11] Wenn eine Invariante das nicht kann, taugt sie auch nichts. Eine Invariante würde man also besonders *stark* nennen, wenn sie besonders „viele“ Räume unterscheiden kann.

Wir wollen die Funktionsweise dieses Satzes am Zusammenkleben von Flächen veranschaulichen:

Beispiel 2.23 Wir nehmen einen Torus, aus dem man eine kleine Kreisscheibe entfernt hat als U. Der Rand von U ist ein Kreisring $W = S^1$. Wir wählen O in S^1 als Basispunkt. Wie man an Abbildung 6 gut sehen kann, gilt $\pi_1(U, O) = \pi_1(S^1 \vee S^1, O) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Wir können nun eine Kreisscheibe V entlang des Kreisringes mit U zum Torus verkleben. Wir wissen $\pi_1(V, O) = \{1\}$, $\pi_1(W, O) = \mathbb{Z}$. Sei γ die Schleife in W, die genau einmal um S^1 herumläuft.

Wir haben: $\pi_1(U \cup V, O)$ besteht aus Worten in A, B, A^{-1} und B^{-1} (alle Elemente von $\pi_1(U, O)$ bestehen aus solchen Worten und in $\pi_1(V, O)$ gibt es nur das Element 1). Wir müssen aber noch $\iota_U(C)$ und $\iota_V(C)$ für alle C aus $\pi_1(W, O) = \mathbb{Z}$ identifizieren. Folgt man der Argumentation aus Beispiel 2.21, so sieht man, dass man es gegebenenfalls durch Umbenennung der Erzeuger stets so einrichten kann, dass $\iota_U([\gamma]) = ABA^{-1}B^{-1}$ ist. Es ist aber stets $C = [\gamma]^k$, $k \in \mathbb{Z}$ und daher muss gelten:

$$(ABA^{-1}B^{-1})^k = \iota_U([\gamma]^k) = \iota_V([\gamma]^k) = 1^k = 1.$$

Analog zu Beispiel 2.21 sehen wir: $\pi_1(\mathbb{T}^2, O) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

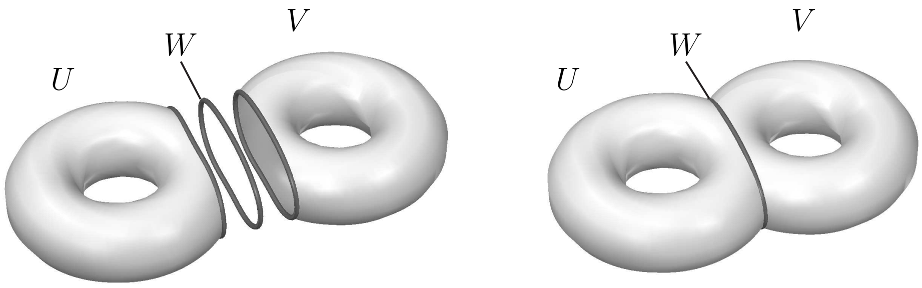

Abbildung 5: Der Doppeltorus wird aus zwei gelochten Tori entlang eines Kreisringes zusammengeklebt.

Beispiel 2.24 Jetzt nehmen wir zweimal den gelochten Torus jeweils für U *und* V und verkleben diese beiden Stücke entlang der sie berandenden Kreisringe (die Kreisringe werden zu einem Kreisring $W = S^1$ verklebt). Dies ergibt einen Doppeltorus (Abbildung 5). Den Basispunkt O wählen wir wieder in W. Wir haben $\pi_1(U, O) = \langle A, B\rangle$, $\pi_1(V, O) = \langle C, D\rangle$ und $\pi_1(W, O) = \langle[\gamma]\rangle$; hierbei ist γ wieder eine Schleife an O in W, die genau einmal um den Kreis verläuft. Wieder kann man es so einrichten, dass $\iota_U([\gamma]) = ABA^{-1}B^{-1}$ und $\iota_V([\gamma]) = DCD^{-1}C^{-1}$

ist. Jedes Element in $\pi_1(U \cup V, O)$ kann deshalb als Wort in A, B, C, D, A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}, D^{-1} geschrieben werden, aber da $ABA^{-1}B^{-1}$ und $DCD^{-1}C^{-1}$ identifiziert werden müssen, gilt $ABA^{-1}B^{-1}CDC^{-1}D^{-1} = 1$. Mathematiker schreiben für die so entstandene Gruppe:

$$\pi_1(U \cup V, O) = \langle A, B, C, D | ABA^{-1}B^{-1}CDC^{-1}D^{-1} = 1 \rangle \, .$$

Man beachte, dass diese Gruppe anders als bei der Fundamentalgruppe des Torus nicht abelsch ist und daher nicht mit $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ identisch ist!

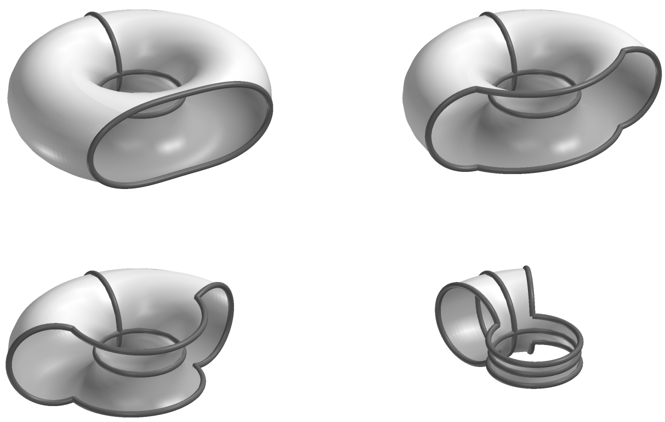

Abbildung 6: Der gelochte Torus läßt sich auf $S^1 \vee S^1$ zusammenziehen. Der Rand wird in die Schleife $ABA^{-1}B^{-1}$ deformiert.

3 Anwendungen

3.1 Der Brouwersche Fixpunktsatz

Dass das, was wir bisher gemacht haben, nicht allein Glasmurmelspiele sind, sollen wir jetzt sehen. Wir beweisen den berühmten Brouwerschen Fixpunktsatz für zwei niedrigdimensionale Spezialfälle. Dieser Satz ist für sich genommen schon sehr schön, aber er besitzt auch einige Verallgemeinerungen mit Signifikanz in der Praxis:

In seiner berühmten Dissertation *Non-cooperative Games* über Spieltheorie definierte der Amerikaner John Nash den Begriff des später sogenannten *Nash-Gleichgewichts*. Ein Nash-Gleichgewicht ist eine Konfiguration von Spielstrategien in einem Spiel mit mehreren Spielern, bei der kein Spieler davon profitieren würde, wenn er seine Strategie als einziger ändert. Nash konnte zeigen, dass in bestimmten Spielen stets so ein Gleichgewicht existiert. Das ist bemerkenswert, weil dies allen Spielern empfiehlt, nach einem Nash-Gleichgewicht zu suchen und sich an diese Strategie zu halten: Es ist gewissermaßen gefährlich, als einziger vom Nash-Gleichgewicht abzuweichen. Beispiele für solche Spiele sind Preisverhandlungen zwischen mehreren Konkurenten am Markt. Das heißt, auch (oder gerade weil) es Spieltheorie heißt, geht es um sehr viel Geld.

Beim Beweis der Existenz des Nash-Gleichgewichtes nutzte Nash – eben, den Brouwerschen Fixpunktsatz, oder besser: eine Verallgemeinerung davon. Für seine außerordentliche Entdeckungen im Bereich der Spieltheorie erhielt Nash 1994 zusammen mit anderen den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften.

Den meisten Menschen ist John Nash wahrscheinlich eher bekannt als gleichnamige Hauptfigur im Hollywood-Film *A Beautiful Mind*.

3.1.1 Der Brouwersche Fixpunktssatz für die Kreisscheibe

Satz 3.1 (Brouwerscher Fixpunktsatz (n=2))
Sei $f\colon D^2 \to D^2$ eine stetige Abbildung, die die abgeschlossene Kreisscheibe D^2 in sich überführt. Dann gibt es ein x in D^2, so dass $f(x) = x$ ist, das heißt, f besitzt einen Fixpunkt.

Beweis. Dies ist ein indirekter Beweis. Wir nehmen an, dass $f(x) \neq x$ gilt für alle x in D^2. Dann können wir wie folgt eine Abbildung $r\colon D^2 \to S^1$ definieren, die die Kreisscheibe D^2 in den Kreisrand S^1 abbildet: Für x aus D^2 sei h_x der Strahl der bei $f(x)$ beginnt und durch x verläuft. Es sei dann $r(x)$ der (gegebenenfalls von $f(x)$ verschiedene) Schnittpunkt von h_x mit S^1. In der Tat ist r stetig. Außerdem gilt $r(x) = x$ für alle x aus dem Rand der Kreisscheibe.

Wir wählen einen Punkt O auf dem Kreisrand als Basispunkt. In Beispiel 2.14 und Beispiel 2.17 haben wir bereits erfahren, dass $\pi_1(D^2, O) = \{1\}$ und $\pi_1(S^1, O) = \mathbb{Z}$ sind. Deswegen gibt es eine Schleife γ in S^1, die in S^1 nicht zusammenziehbar ist, das heißt $[\gamma]_{S^1} \neq 1_{S^1}$.[12] Als Schleife in D^2 ist γ aber sehr wohl zusammenziehbar: $[\gamma]_{D^2} = 1_{D^2}$. Betrachte die Schleife $\delta(t) = r((\gamma(t)))$ in S^1. Ist F eine Deformation von γ zur konstanten Schleife κ_O in D^2, so ist $H(t,s) := r(F(t,s))$ eine Deformation in S^1 von δ zur konstanten Kurve κ_O. Also ist $[\delta]_{S^1} = 1_{S^1}$. Andererseits ist $[\delta]_{S^1} = [\gamma]_{S^1}$, denn für alle t liegt $\gamma(t)$ im Kreisrand S^1 und deswegen ist $\delta(t) = r(\gamma(t)) = \gamma(t)$. Aber wir hatten γ gerade so gewählt, dass $[\gamma]_{S^1} \neq 1$ ist! Widerspruch! Eine Abbildung wie r kann es nicht geben und unsere Annahme war falsch: f muss einen Fixpunkt haben! □

[12] Es ist jetzt sehr wichtig, Deformationsklassen von Schleifen in den verschiedenen Räumen D^2 und S^1 zu unterscheiden. Deswegen schreiben wir $[\gamma]_{S^1}$ für die Deformationsklasse von γ als Schleife in S^1 bzw. $[\gamma]_{D^2}$ für die Deformationsklasse von γ als Schleife in D^2

Kurios am Brouwerschen Fixpunktsatz ist, dass man mit einer Nichtexistenzaussage eine sehr starke Existenzaussage beweisen kann!

3.1.2 Der Brouwersche Fixpunktssatz für die Vollkugel

Satz 3.2 (Brouwerscher Fixpunktsatz (n=3))
Sei $f\colon D^3 \to D^3$ eine stetige Abbildung, die die abgeschlossene Vollkugel D^3 in sich überführt. Dann besitzt f einen Fixpunkt.

Die Beweisidee ist dieselbe, wie für den Fall $n = 2$: Hat f keine Fixpunkte, kann man ganz analog eine Abbildung $r\colon D^3 \to S^2$ konstruieren, so dass $r(x) = x$ für alle x aus dem Rand S^2 der Kugel. Dann führt man mit einer geeigneten Invariante die Existenz von r ad absurdum. Leider reicht die Fundamentalgruppe π_1 hier nicht mehr aus, denn sowohl $\pi_1(D^3, O)$ als auch $\pi_1(S^2, O)$ sind gleich $\{1\}$. Man kann aber ganz ähnliche Invarianten herstellen. Eine, die wir noch anschaulich verstehen können ist π_2, die sogenannte *zweite Homotopiegruppe*[13]

3.1.3 Die zweite Homotopiegruppe

Wir haben eine Schleife als „schöne“ Abbildung γ vom Einheitsintervall nach M, die $\gamma(0) = \gamma(1) = O$ erfüllt, definiert. Verklebt man die beiden Endpunkte des Einheitsintervalls miteinander, so erhält man einen Kreis. Das heißt, eine Schleife ist das Bild eines Kreisringes unter einer „schönen“ Abbildung. Wie schon erwähnt, kann man sich das Berechnen der Fundamentalgruppe grob so vorstellen, dass man sein Lasso auswirft und schaut, „ob und wie man etwas einfangen kann“, das heißt, ob man die Schlinge zusammenziehen kann.

Nun, manche Dinge lassen sich nicht mit einem Lasso fangen. Wie könnte man zum Beispiel eine Katze einfangen? Man nimmt ein Stück Stoff, zum Beipiel ein rundes Tuch und wirft das über die Katze. Dann rafft man den Rand des Tuches zusammen – schon hat man die Katze im Sack. Das ist im Prinzip die Idee der zweiten Homotopiegruppe: Statt Bilder von Kreisringen und ihre Deformationsklassen zu untersuchen, kann man auch die Bilder von Sphären (der zugebundene Sack ist das Bild einer Sphäre, solange er keine Löcher hat) und deren Derformationsklassen betrachten.

Man nimmt nun also die Sphäre S^2 her, wählt auf ihr einen Basispunkt Q und betrachtet jetzt für einen Raum M mit Basispunkt O schöne Abbildungen $f\colon S^2 \to M$ mit $f(Q) = O$. Eine *Deformation* H von γ_0 nach γ_1 ist jetzt eine schöne Abbildungen $H\colon S^2 \times [0, 1] \to M$ so dass für alle P auf S^2 gilt:

i) $H(P, 0) = \gamma_0(P)$,
ii) $H(P, 1) = \gamma_1(P)$,

[13] Nebenbei: $\pi_1(M, O)$ wird auch die *erste Homotopiegruppe* genannt. „Homotopie“ ist dabei lediglich der mathematische Fachbegriff für „Deformation“.

iii) Für jedes t aus $[0,1]$ gilt $H(Q,t) = O$.

Mit $[\gamma]$ bezeichnet man nun die Deformationsklasse von $\gamma\colon S^2 \to M$ mit $\gamma(Q) = O$ und mit $\pi_2(M,O)$ bezeichnet man die Menge der Deformationsklassen.

Für zwei solche Abbildungen $\gamma, \delta\colon S^2 \to M$ kann man wie folgt eine Verknüpfung $\gamma * \delta$ definieren: Wir gehen davon aus, dass Q auf dem Äquator liegt. Nun schnalle man um die Sphäre einen Gürtel entlang des Äquators und ziehe ihn ganz eng zu einem Punkt zusammen. Man erhält (topologisch gesehen) zwei Spären, die in Q zusammengeklebt sind, wir nennen das für den Moment mal $S^2 \vee S^2$. Wir haben jetzt eine Zuordnung $f\colon S^2 \to S^2 \vee S^2$ und können nun die eine Sphäre von $S^2 \vee S^2$ mit γ nach M abbilden und die andere mit δ nach M abbilden, so dass Q von beiden nach O abgebildet wird. Die resultierende Abbildung

$$S^2 \xrightarrow{f} S^2 \vee S^2 \xrightarrow{\gamma,\delta} M$$

nennen wir $\gamma * \delta$. Nun muss man ganz analog zum Vorgehen bei der Fundamentalgruppe in Abschnitt 2.3 nachweisen, dass die Deformationsklasse von $\gamma * \delta$ nur von den Deformationsklassen von γ und δ abhängt, man also eine Verknüpfung $[\gamma] \bullet [\delta] = [\gamma * \delta]$ erhält, und dass $\pi_2(M,O)$ tatsächlich durch $\bullet$ zu einer Gruppe, der *zweiten Homotopiegruppe* wird. Wir sparen uns das und merken nur an, dass natürlich die Deformationsklasse der konstanten Abbildung $\kappa_O\colon P \mapsto O$ das Einselement in $\pi_2(M,O)$ liefert. Außerdem – und das ist überraschend – ist $\pi_2(M,O)$ immer abelsch, es gilt also immer $\Gamma \bullet \Delta = \Delta \bullet \Gamma$ für alle Γ, Δ in $\pi_2(M,O)$.

Abschließend beobachten wir die folgenden beiden Beispiele:

Beispiel 3.3 Die zweite Homotopiegruppe der Einheitsvollkugel D^3 ist $\pi_2(D^3,(0,0,0)) = \{1\}$. Das sieht man ganz einfach ein: Für die Abbildung $\gamma = (\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\colon S^2 \to D^3$ wird durch

$$H(P,t) = (t\cdot\gamma_1(P), t\cdot\gamma_2(P), t\cdot\gamma_3(P))$$

eine Deformation zur konstanten Abbildung $\kappa_{(0,0,0)}(P) = (0,0,0)$ gegeben.

Beispiel 3.4 Die Sphäre S^2 hat eine Fundamentalgruppe ungleich $\{1\}$. Das sieht man einfach daran, dass die identische Abbildung $\gamma(P) = P$ sicher nicht auf einen Punkt zusammenziehbar ist. Genauer ist $\pi_2(S^2,O) = \mathbb{Z}$, aber das beweisen wir hier nicht stringent.

Aufgabe 3.5 Mit diesem Wissen beweise Satz 3.2. Tipp: Der Beweis ist vollkommen analog zum Beweis von Satz 3.1. Nutze die identische Abbildung aus Beispiel 3.4.

3.2 Der Satz von Borsuk-Ulam für $n = 2$

Satz 3.6 (Borsuk-Ulam (n=2))
Sei $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung von der zweidimensionalen Sphäre in die Ebene. Dann gibt es ein x auf der Sphäre mit $f(-x) = f(x)$.

Beweis. Wir führen wieder einen indirekten Beweis. Angenommen, wir haben ein f vorliegen, so dass $f(-x) \neq f(x)$ für alle x aus der Sphäre S^2. Wir definieren die Abbildung $g\colon S^2 \to S^1$ von der Sphäre S^2 in den Einheitskreisrand S^1 durch

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}.$$

Diese erfüllt $g(-x) = -g(x)$. Man beachte, dass g nur dann definiert werden kann, wenn $f(x) - f(-x) \neq 0$ ist für alle x. Sei $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\colon S^1 \to S^2$ eine Schleife, die genau einmal um den Äquator der Sphäre läuft. Auch für sie gilt $\gamma(-y) = -\gamma(y)$ für alle y aus S^1. Schließlich definieren wir die Schleife $\delta\colon S^1 \to S^1$ durch $\delta(y) = g(\gamma(y))$. Sie erfüllt

$$\delta(-y) = g(\gamma(-y)) = g(-\gamma(y)) = -g(\gamma(y)).$$

Wenn y halb um den Kreis gelaufen ist, sagen wir von $(1,0)$ nach $(-1,0)$ im Gegenuhrzeigersinn, dann ist $\delta(y)$ von $\delta(1,0)$ nach $\delta(-1,0) = -\delta(1,0)$ gelaufen; $\delta(y)$ halt also insgesamt den gerichteten Winkel$(n + \frac{1}{2}) \cdot 360°$ zurückgelegt, mit $n \in \mathbb{Z}$. Läuft y anschließend weiter von $(-1,0)$ nach $(1,0)$ im Gegenuhrzeigersinn, so legt $\delta(y)$ noch einmal den gerichteten Winkel $(n + \frac{1}{2}) \cdot 360°$ zurück und kommt wieder bei $\delta(1,0)$ an. Insgesamt legt δ also den gerichteten Winkel $(2n+1) \cdot 360°$ zurück und wird durch das Wort A^{2n+1} beschrieben. Dann kann δ aber nicht zusammenziehbar sein, denn $2n+1$ ist sicher nicht 0.

Andererseits ist $\gamma\colon S^1 \to S^2$ zusammenziehbar, denn $\pi_1(S^2, O) = \{1\}$. Dann ist aber auch δ zusammenziehbar; eine Deformation F von γ zur konstanten Schleife $\kappa_{\gamma(1,0)}$ liefert die Deformation $H(t,s) = g(F(t,s))$ von δ zur konstanten Schleife $\kappa_{\delta(1,0)}(t) = \delta(1,0)$. Das ist der gewünschte Widerspruch. □

Folgerung 3.7 *Auf der Erde gibt es immer mindestens ein Paar gegenüberliegender Punkte, die gleiche Temperatur* und *gleichen Luftdruck haben.*

Folgerung 3.8 *Es gibt keine stetige* 1–1-*Abbildung von der Sphäre in die Ebene.*

Und jetzt zum Schluss demonstrieren wir, dass Mathematik auch beweisen kann, dass es nicht vollkommen ungerecht zugehen muss in der Welt:

Folgerung 3.9 (Schinkenbrötchen-Theorem)
Man kann ein Brötchen mit einer Scheibe Schinken darauf stets durch einen geraden Schnitt so in zwei Teile schneiden, dass beide Teile gleich viel Brot und gleich viel Schinken enthalten.

Beweis. Man lege das Schinkenbrötchen in den $\mathbb{R}^3$. Für jeden Punkt x aus S^2 sei H_x der Halbraum von $\mathbb{R}^3$, der durch die zum Vektor $\vec{x}$ senkrechten Ebene E_x begrenzt wird und x enthält. Sei nun $f_1(x)$ das Volumen (oder das Gewicht) des

Schinkens, der in H_x liegt, und $f_2(x)$ das Volumen (bzw. das Gewicht) des Brotes, das in H_x liegt. Ändert sich x nur wenig, so kippt auch E_x nur ein wenig. Folglich hängen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ stetig von x ab. Durch $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ wird also eine schöne Abbildung $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben. Der Satz von Borsuk-Ulam besagt danng gerade, dass es ein x auf der Sphäre gibt, so dass $f(x) = f(-x)$ ist. Da aber H_x und H_{-x} zusammen den ganzen Raum $\mathbb{R}^3$ (außer E_x, eine unendlich dünne Scheibe, in der eine unwesentliche Menge Brot und Schinken enthalten sind,) einnehmen, ist das Schinkenbrötchen vollständig in H_x und H_{-x} enthalten. Da aber $f_1(x) = f_1(-x)$ und $f_2(x) = f_2(-x)$ gilt, ist in H_x genausoviel Schinken und Brot wie in H_{-x}. Nimmt man nun E_x als Schnittebene, hat man sein Schinkenbrötchen gerecht aufgeteilt. $\square$