

Sphärische Geometrie

Jetzt geht's rund!

Henrik Schumacher

27. September 2008

1 Einleitung

Der Raum, in dem heute Schulgeometrie betrieben wird, ist die flache (euklidische) Ebene, allenfalls noch der (euklidische) Raum. Dabei entsteht der Eindruck, es gebe keine anderen Räume, schon gar nicht mit praktischer Relevanz. Dabei sind einige der entscheidenden physikalischen Entdeckungen des frühen 20. Jahrhunderts – allen voran die allgemeine Relativitätstheorie – gerade darauf zurückzuführen, dass man begonnen hatte, andere, eben nicht flache Geometrien zu untersuchen und überhaupt erst als Schauplatz der Physik, als „Raumzeit“ in Betracht zu ziehen.

Die Anfänge der historischen Entwicklung der Geometrie weg von den euklidischen hin zu anderen, neuen Geometrien können wir mit den Mitteln der Schulgeometrie nachvollziehen, indem wir Geometrie auf der Kugeloberfläche betreiben – und kommen dabei zugleich ganz dicht an die wörtliche Bedeutung des Wortes „Geometrie“ heran: *geos* (gr.) bedeutet „Welt“ oder „Erde“; *metrike* (gr.) bedeutet soviel wie „Maß“ oder „Messen“. Die Geometrie hat ihre Wurzeln in der Landvermessung und einige der wichtigen Impulse der modernen Geometrie gingen von Carl Friedrich Gauß und seinem Schüler Bernhard Riemann aus: Gauß selbst war als Landvermesser tätig. Dadurch inspiriert führte er die Gauß-Krümmung ein und bewies das berühmte Theorema Egregium: Man kann kein Stück aus der Kugeloberfläche verzerrungsfrei in die Ebene abbilden.

Wir möchten versuchen, das Theorema Egregium zu beweisen, wenn auch ohne den Begriff der Gauß-Krümmung. Wir werden dazu viel experimentieren und elementare Geometrie und Trigonometrie auf der Kugel betreiben. Zentral für unser Vorgehen sind die Kosinussätze in der Ebene und auf der Sphäre; mit ihnen werden wir sehen, dass bei einer verzerrungsfreien Abbildung von der Sphäre in die Ebene irgendwas gewaltig schiefgeht. Außerdem werden wir andere Anomalien auf der Kugeloberfläche entdecken z. B. die Winkelsumme im Dreieck oder die Nicht-Existenz von Parallelen. Daneben streifen wir auch kurz die Bewegungen der Kugel; wir sehen, dass es recht viele Bewegungen gibt und die Kugel daher äußerst symmetrisch ist. Alles in allem also: Eine runde Sache.

2 Grundlegende Definitionen

Immer, wenn man sich in der Mathematik mit etwas Neuem beschäftigt, muss man zunächst das Untersuchungsobjekt klar von anderen Dingen abgrenzen. Das machen wir jetzt:

Definition 2.1 Die *Sphäre* S^2 ist die Menge aller Punkte (x, y, z) im dreidimensionalen Raum, die die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ erfüllen.

Das war kurz, aber so ganz wissen wir nicht, worum es geht. Schauen wir uns einen Punkt (x, y, z) auf der Sphäre an: Laut Definition erfüllt er die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Dann erfüllt er auch automatisch die Gleichung

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = 1$$

und wir sehen, dass alle Punkte auf der Sphäre den Abstand 1 vom Koordinatenursprung $O = (0, 0, 0)$ haben! Umgekehrt erfüllt jeder Punkt (x, y, z) mit Abstand 1 vom Koordinatenursprung die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, das heißt, die Sphäre ist einfach die Oberfläche der Kugel mit Radius 1 um den Ursprung.

Wir möchten Geometrie auf der Sphäre betreiben. In der Ebene gibt es Objekte wie Geraden, Dreiecke, Abstand, Kreise und Winkel. Solche Dinge kann man auch für die Sphäre definieren. Beginnen wir mit dem Abstand:

Definition 2.2 Seien A, B Punkte auf der Sphäre. Der *Abstand* $d(A, B)$ auf der Sphäre ist die Länge eines kürzesten Weges von A nach B .

Diese Definition hat es in sich, denn anscheinend muss man die Längen sämtlicher Wege von A nach B kennen. Schon der Begriff „Länge“ ist viel komplizierter, als wir das gerne hätten: Natürlich kann man für einen differenzierbaren Weg $w: [a, b] \rightarrow S^2$ mit $w(a) = A$ und $w(b) = B$ die Länge ausrechnen, wenn man sich mit Differential- und Integralrechnung auskennt. Man erhält dann sowas¹:

$$d(A, B) = \int_a^b \sqrt{\dot{w}_1^2(t) + \dot{w}_2^2(t) + \dot{w}_3^2(t)} dt.$$

Aber selbst dann ist es noch eine heikle Angelegenheit, die *kürzesten* Wege herauszufinden. Dabei ist das Ergebnis sehr, sehr einfach, wie wir gleich sehen werden. Wir machen zunächst wieder eine

Definition 2.3 Sei ε ein Ebene im Raum, die O enthält. Die Schnittfigur g von ε und S^2 nennt man einen *Großkreis*.

Beispiele für Großkreise auf der Erdkugel sind der Äquator und die Längengrade – nicht aber die Breitenkreise! Letztere erhält man durch Schneiden von S^2 mit Ebenen, die *nicht* durch O verlaufen.

¹Wer das folgende nicht versteht: Nicht schlimm! Wir benutzen das sowieso nicht. Viel zu kompliziert!

Hilfssatz 2.4 *Sind A und B zwei Punkte auf S^2 , so gibt es mindestens einen Großkreis, der beide enthält.*

Beweis. Betrachte A und B als Punkte im Raum. Es gibt durch drei Punkte im Raum stets mindestens eine Ebene, die alle drei enthält. Sei ε so eine Ebene, die A , B und O enthält. Dann liegen A und B sowohl auf ε als auch auf S^2 und damit auch auf der Schnittfigur g . Es ist dann g ein Großkreis, der A und B enthält. \square

Wohlgemerkt: Es kann mehrere (unendlich viele) solche Großkreise geben, nämlich genau dann, wenn A , B und O auf einer gemeinsamen Geraden im Raum liegen. Auf der Erdkugel z. B. verlaufen sämtliche Längengrade durch die beiden Pole.

Es stellt sich nun heraus, dass kürzeste Wege auf der Kugel stets auf Großkreisen liegen. Wir berufen uns an dieser Stelle auf unsere Intuition:

Aufgabe 2.5 Nimm eine Kugel zur Hand und zeichne einen Großkreis ein. (Ein Globus eignet sich auch hervorragend!) Stelle Dir vor, Du wärst mit dem Auto (oder dem Rad) auf einer Straße entlang dieses Großkreises unterwegs: Geh mit dem Auge ganz dicht an die Kugel heran und blicke entlang des Großkreises. Musst Du wirklich steuern, um auf der Straße zu bleiben? Nein, Du fährst *geradeaus*. Und wer geradeaus fährt, der fährt keine Umwege, oder?

Das ist interessant: Für ein Krabbelwesen, das auf einer Kugeloberfläche lebt, erscheint ein Großkreis *gerade*. In der Ebene nimmt ein Krabbelwesen nur Geraden als gerade wahr. Dies und die Tatsache, dass die kürzesten Verbindungswege in der Ebene auf Geraden liegen, ermutigt uns zur Definition:

Definition 2.6 Die *Geraden* auf der Sphäre sind die Großkreise.

Eigentlich hätten wir uns diese Definition sparen können, denn die Großkreise hatten ja vorher schon einen Namen. Wir möchten hiermit aber unterstreichen, dass die Großkreise in der sphärischen Geometrie diejenige Rolle innehaben, die von den Geraden in der ebenen Geometrie eingenommen wird. Mit [Hilfssatz 2.4](#) haben wir auch schon unseren ersten richtigen Satz in der sphärischen Geometrie bewiesen:

Satz 2.7 *Durch zwei Punkte A und B auf der Sphäre gibt es stets mindestens eine Gerade auf der Sphäre. Liegen die Punkte nicht mit O auf einer gemeinsamen Geraden im Raum, so ist diese Gerade eindeutig.*

Aufgabe 2.8 Suche Dir irgendwoher eine Kugel und einen Schuhkarton. Schneide in den Boden ein rundes Loch mit dem Radius der Kugel aus und kürze die Seitenwände so, dass die Höhe des Kartons genau dem Radius der Kugel entspricht. Drehst Du den Karton um und steckst die Kugel in das Loch, sollte die Kugel genau zur Hälfte darin verschwinden. Mit einem (am besten wasserlöslichen Folien-)Stift kannst Du nun damit beliebige Großkreise auf Deiner Kugel einzeichnen. Gratulation! Du hast soeben ein Großkreislineal gebaut! Das kannst Du nun prima benutzen, um all die folgenden Ergebnisse nachzuvollziehen!

Ein zweiter, sehr Satz wichtiger ist dieser:

Satz 2.9 *Zwei verschiedene Geraden auf der Sphäre schneiden sich stets in genau zwei Punkten P und Q und es gilt $\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OQ}$.*

Beweis. Seien g und h zwei Großkreise auf der Sphäre und ε_g und ε_h die zugehörigen Ebenen durch O , in denen sie enthalten sind. Da ε_g und ε_h den Punkt O gemeinsam haben, aber nicht identisch sind, schneiden sie sich in einer Geraden l im Raum durch O . Seien P und Q die beiden Punkte auf l , die zu O den Abstand 1 haben. Natürlich gilt dann $\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OQ}$. Die Punkte P und Q liegen sowohl auf ε_g als auch auf S^2 , also auch auf g . Ebenso liegen P und Q auf ε_h und auf S^2 , damit auch auf h . Andererseits müssen alle Punkte aus der Schnittmenge von g und h sowohl auf ε_g und ε_h und damit auf l liegen; zusätzlich müssen diese von O den Abstand 1 haben, weshalb auch keine anderen Punkte außer P und Q auf beiden Großkreisen gleichzeitig liegen können. \square

Das ist schon einmal eine Besonderheit! In der Ebene kann es passieren, dass sich zwei Geraden gar nicht schneiden und wenn doch, dann gibt es nur einen Schnittpunkt. In der Ebene gilt ferner das berühmte *Parallelenaxiom* von Euklid, welches besagt, dass es zu einer Geraden l und einem Punkt P außerhalb von l *genau eine* Parallele zu l durch P gibt. Diese Axiom kann auf der Sphäre folglich nicht gelten, weshalb die Sphäre eine sogenannte *nicht-euklidische Geometrie* ist. Na ja, für jemanden, der das gerade erzählt bekommt, ist das vielleicht nicht so außergewöhnlich. Allerdings haben die Mathematiker jahrhundertlang das Parallelenaxiom als „Makel“ angesehen und zu *beweisen* versucht, dass das Parallelenaxiom aus den anderen Axiomen und Postulaten Euklids folgt, oder aber ein Beispiel für eine Geometrie anzugeben, in der alle Axiome Euklids bis auf das Parallelenaxiom gelten. Wenn man bedenkt, dass Euklid ca. 365 bis 300 vor Christus lebte, eine nicht-euklidische Geometrie aber erst 1826 von Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski konstruiert wurde², merkt man vielleicht doch die Besonderheit dieses Axioms. Übrigens haben sich die alten Griechen schon um 350 vor Christus – also zu Euklids Lebzeiten – bereits mit sphärischer Trigonometrie beschäftigt, weshalb es aus heutiger Sicht etwas verwunderlich ist, dass die sphärische Geometrie nicht schon früher als nicht-euklidische Geometrie erkannt wurde. Dies liegt natürlich daran, dass wir mit der Definition der Geraden auf der Kugel eine weitreichende Abstraktion gemacht haben.

Definition 2.10 Von zwei Punkten P und Q auf der Sphäre mit $\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OQ}$ sagen wir, sie liegen *einander gegenüber*. Den gegenüberliegenden Punkt von P bezeichnen wir auch als seinen *Gegenpunkt* P' .

Nun wissen wir auch, wie wir einen kürzesten Verbindungsweg zwischen zwei Punkt P und Q auf der Sphäre finden können: Wir zeichnen einen Großkreis g durch P und Q .

²Wahrscheinlich war Carl-Friedrich Gauß der erste, der eine solche Geometrie konstruiert hat; er hat sie aber in seine Schreibtischschublade abgelegt, statt sie zu veröffentlichen. – Als Wahlgöttinger muss ich das einfach erwähnen...

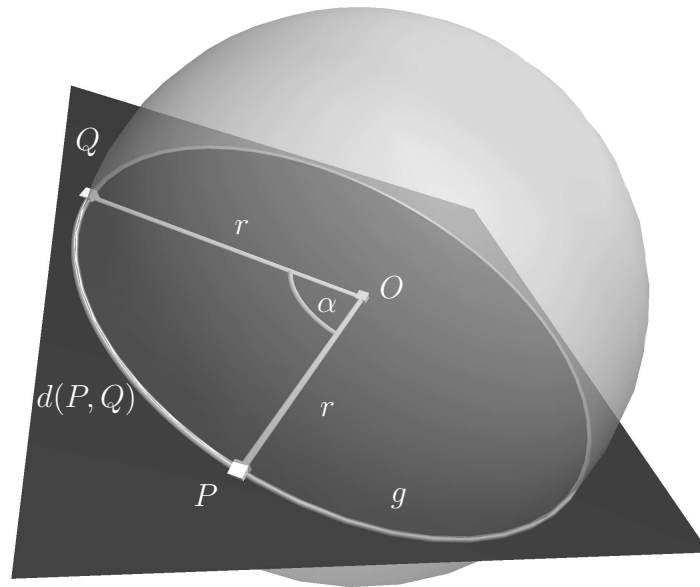


Abbildung 1: Es gilt $d(P, Q) = r\alpha$. Der Abstand auf der Sphäre entspricht dem Winkel zwischen OP und OQ in Bogenmaß ($r = 1$).

Dann wird g durch die Punkte P und Q in zwei Großkreisbögen geteilt. Liegen P und Q einander gegenüber, so sind diese beiden Kreisbögen gleich lang und jeder von ihnen ist ein kürzester Verbindungsweg. Liegen P und Q nicht einander gegenüber, so ist einer der beiden Bögen kürzer als der andere; dieser ist dann auch der *kürzeste* Verbindungsweg und es gibt auch keine anderen Verbindungswege, die gleich lang sind.

Aufgabe 2.11 Warum ist es oben egal, *welchen* Großkreis man durch P und Q legt, um die kürzesten Verbindungswege zu bestimmen?

Betrachte nun die Ebene ε_g durch O , P und Q (vgl. [Abbildung 1](#)): Der Großkreis g ist dann ein Kreis durch P und Q um O mit dem Radius 1 und der Abstand $d(P, Q)$ ist gerade das Maß des kleineren von den Geraden OP und OQ eingeschlossenen Winkels in Bogenmaß³. Wir könnten genauso gut $d(P, Q)$ in Grad messen, wenn wir wollten. Für Abstand $|PQ|$ im Raum gilt dann gerade

$$|PQ| = 2 \sin \frac{d(P, Q)}{2}. \quad (1)$$

Da der Umfang eines Großkreises gleich 2π (oder 360°) ist, beträgt der größte Abstand, den zwei Punkte auf der Sphäre voneinander haben können, gerade mal π (oder 180°); das tritt genau dann ein, wenn die beiden Punkte einander gegenüber liegen.

³Das Bogenmaß eines Winkels α ist die Länge dazugehörigen Bogens auf einem Kreis mit Radius 1.

Auch das ist etwas Besonderes: In der Ebene können Punkte beliebig großen Abstand haben; sie dehnt sich unendlich weit aus. Die Sphäre ist vergleichsweise „klein“. Mathematiker nennen das *beschränkt*.

Direkt mit dem Abstandsbegriff verknüpft ist der Begriff des Kreises:

Definition 2.12 Ein *Kreis* auf der Sphäre um den Punkt M mit Radius r ist die Menge aller Punkte P auf der Sphäre mit $d(M, P) = r$.

Aufgabe 2.13 Wie sieht so ein Kreis auf der Sphäre aus? Nimm einen gewöhnlichen Zirkel und klebe mit Klebeband einen Folienstift an den Schenkel mit der Bleistiftmine. Stich die Spitze irgendwo in die Kugel, setze den Stift auf und ziehe ihn um die Einstichstelle herum – fertig ist ein Kreis. Ziehe Kreise mit verschiedenen Radien um denselben Punkt. Woran erinnert Dich das? Was ist ein Kreis mit Radius $\frac{\pi}{2}$ (90°)? Vorsicht! Der Abstand zwischen Zirkelspitze und Stiftspitze ist natürlich nur der räumliche Abstand. Nutze [Gleichung \(1\)](#), wenn Du bestimmte Radien zeichnen möchtest.

Jetzt hat man Zirkel und Lineal für die Kugel und kann schon die ersten Konstruktionsaufgaben lösen!

Aufgabe 2.14 Zeichne einen Kreis durch einen vorgegebenen Punkt P um einen vorgegebenen Punkt M . Das ist normalerweise schwierig, wenn $d(M, P)$ wesentlich größer als $\frac{\pi}{2}$ ist. Ein Kreis um M durch P ist aber der gleiche wie der durch P um den Gegenpunkt M' zu M . Konstruiere also zu M den Gegenpunkt M' und zeichne dann den Kreis um M' durch P .

Aufgabe 2.15 Konstruiere zu zwei verschiedenen vorgegebenen Punkten P und Q die Menge der Punkte R mit $d(P, R) = d(Q, R)$. Vorsicht! Was passiert, wenn P und Q einander gegenüber liegen?

Aufgabe 2.16 Zu einem vorgegebenen Punkt P und einem Großkreis g auf der Sphäre konstruiere den zu P nächstgelegenen Punkt auf g . (In der Ebene wäre das der Lotfußpunkt.)

Es ist gar nicht so einfach, Winkel auf der Sphäre anständig zu definieren. In der Ebene sagt man, ein Winkel sei der zusammenhängende Bereich der Ebene, der durch zwei von einem gemeinsamen Punkt ausgehenden *Strahlen* begrenzt wird. Das geht auf der Sphäre gar nicht, weil wir da keine Strahlen haben (warum?). Deswegen machen wir das so:

Definition 2.17 Ein *Winkel* α auf der Sphäre am *Scheitelpunkt* S ist ein zusammenhängender Bereich auf der Sphäre, der durch zwei durch S verlaufende Großkreise g und h begrenzt wird. Das *Maß des Winkels* α sei definiert durch das Maß desjenigen von den Ebenen ε_g und ε_h eingeschlossenen Winkels, der α enthält.

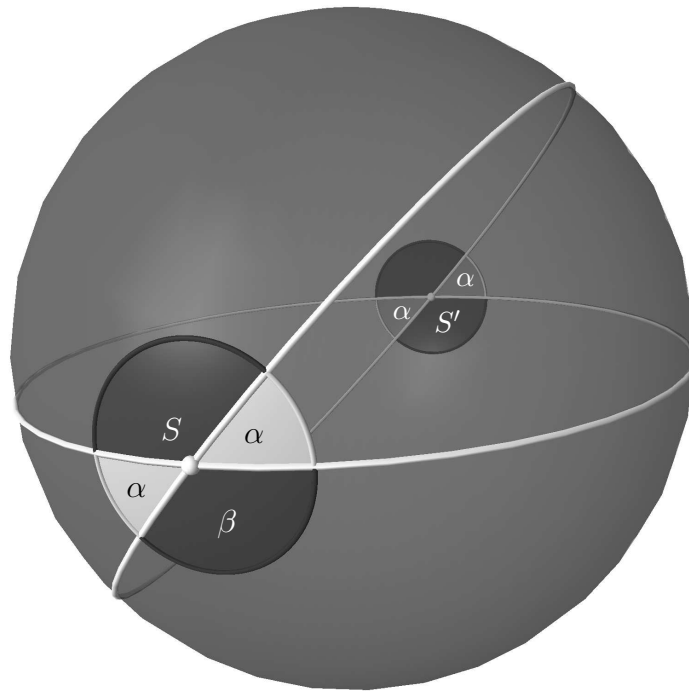


Abbildung 2: Winkel zwischen zwei Großkreisen.

Zwei Großkreise definieren also vier Winkel an jedem der beiden Schnittpunkte; im ganzen also acht Winkel. Analog wie in der Ebene gibt es auf der Sphäre auch die Begriffe *voller Winkel*, *Gegenwinkel* und *Nebenwinkel* (vgl. [Abbildung 2](#)): Der volle Winkel misst 2π (360°), die Maße zweier Gegenwinkel sind gleich, die Summe der Maße zweier Nebenwinkel ergibt π (180°). Zusätzlich kann man noch *einander gegenüber liegende* Winkel definieren (vgl. [Abbildung 2](#)). Die Maße einander gegenüber liegender Winkel stimmen überein, so dass von Maßen der acht Winkel zwischen zwei Großkreisen jeweils vier übereinstimmen. Deswegen kann man durchaus von *dem* Winkel zwischen zwei Großkreisen sprechen und meint damit das kleinste Maß der auftretenden Winkel.⁴

Aufgabe 2.18 Vollziehe die Definition auf Deinem Kugelmodell nach.

Aufgabe 2.19 Konstruiere zu zwei verschiedenen vorgegebenen Punkten P und Q und einem Großkreisbogen zwischen P und Q die Mittelsenkrechte. Vorsicht! Was passiert, wenn P und Q einander gegenüber liegen? Vergleiche mit [Aufgabe 2.15](#).

Aufgabe 2.20 Zu einem vorgegebenen Punkt P und einem Großkreis g auf der Sphäre konstruiere das Lot von P auf g . Vergleiche mit [Aufgabe 2.16](#).

⁴Das ist alles ziemlich spitzfindig; man hat hier in der Tat einige Freiheiten, Begriffe so zu definieren, dass sie die entsprechenden Begriffe aus der Ebene verallgemeinern. „Im Wesentlichen“ sollte dabei aber stets das Gleiche herauskommen. Ich hoffe, jeder weiß intuitiv, was mit einem Winkel auf der Sphäre gemeint ist.

Aufgabe 2.21 Wie kann man Winkel zwischen zwei Großkreisen g und h auf der Kugel messen? Die Definition rät, den Winkel zwischen zugehörigen Ebenen ε_g und ε_h zu messen. Dies kann man z. B. durchführen, indem man aus einem ebenen Stück Karton am Rand einen Halbkreis mit dem Radius der Kugel ausschneidet. Nun dreht man die Kugel so, dass der eine Großkreis entlang des Großkreislineals zu liegen kommt und hält das soeben ausgeschnittene Stück Karton an den zweiten Großkreis. Nun kann man mit einem Geodreieck den Winkel zwischen diesen beiden „Ebenen“ von der Seite her messen.

Das ist etwas umständlich. Verwende die Mittelsenkrechte zwischen den beiden Schnittpunkten der Großkreise und einen Zirkel, um den Winkel zwischen den Großkreisen zu messen!

Aufgabe 2.22 Konstruiere die Winkelhalbierenden zweier Großkreise.

Aufgabe 2.23 Zeige: In einem Sehnenviereck auf der Kugel stimmen die Winkelsummen gegenüberliegender Winkel überein. (Tipp: Gleichschenklige Dreiecke.)

Nun können wir auch Vielecke definieren. Etwas Besonderes: Auf der Kugel kann man sinnvolle Zweiecke definieren:

Definition 2.24 Ein *Zweieck* auf der Sphäre ist eine Fläche, die durch zwei Großkreise g_a und g_b begrenzt wird. Sind g_a und g_b gleich, so nennen wir das Zweieck *entartet*, ansonsten *nicht-entartet*.

In einem nicht-entarteten Zweieck nennen wir die Schnittpunkte A und B von g_a und g_b die *Ecken* des Zweiecks und die Großkreisbögen a und b auf g_a bzw. g_b , die das Zweieck berühren, als *Seiten* des Zweiecks.

Aufgabe 2.25 Was würde man als den oder die Winkel in einem sphärischen Zweieck bezeichnen (vgl. auch [Definition 2.17](#))? Bestimme den Flächeninhalt eines Zweiecks in Abhängigkeit von der Winkelsumme. (Tipp: Der Flächeninhalt der Oberfläche einer Kugel mit Radius r beträgt $4\pi r^2$.)

Definition 2.26 Ein *Dreieck* auf der Sphäre (auch *Kugeldreieck*) ist eine Fläche auf der Sphäre, die durch drei Großkreise g_a , g_b und g_c begrenzt wird. Schneiden sich die drei Großkreise paarweise in genau sechs Punkten, so nennt man das Dreieck *nicht-ausgeartet*, ansonsten *ausgeartet*. Bei einem nicht-ausgearteten Dreieck bezeichnen wir die Schnittpunkte wie folgt:

$$g_b \cap g_c = \{A, A'\}, \quad g_c \cap g_a = \{B, B'\} \quad \text{und} \quad g_a \cap g_b = \{C, C'\},$$

und zwar so, dass das Dreieck die Punkte A , B und C berührt (vgl. [Abbildung 3](#)). Wir nennen A , B , C die *Ecken* des Dreiecks. Die *Seiten* des Dreiecks sind diejenigen Kreisbögen a , b und c auf g_a , g_b bzw. g_c zwischen den Ecken des Dreiecks, die das Dreieck berühren.

Ein Dreieck, dessen Seiten und Winkel alle kleiner als π (180°) sind, nennt man *eulersch*.

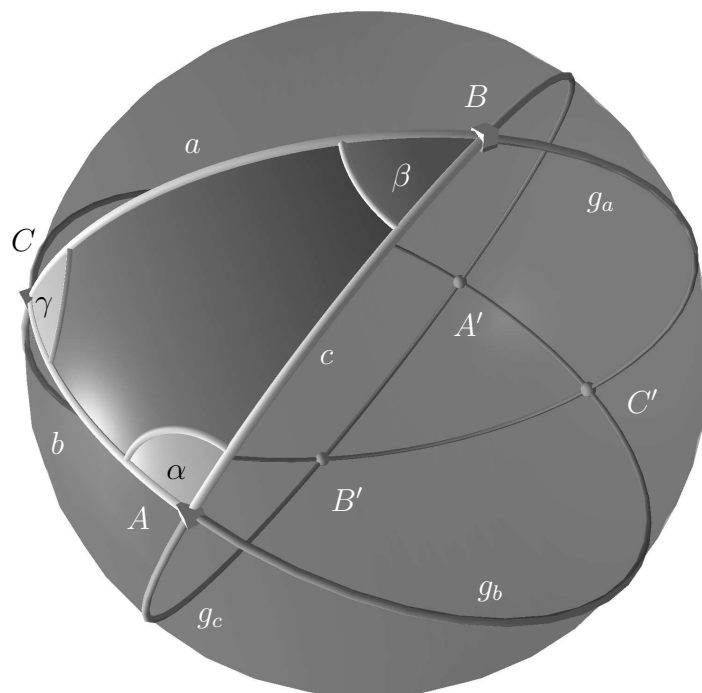


Abbildung 3: Kugeldreieck mit den üblichen Bezeichnungen.

Anders als in der Ebene wird ein nicht-entartetes Dreieck *nicht* eindeutig durch drei paarweise verschiedene Punkte gegeben: Nimmt man nämlich eine Dreiecksfläche aus der Kugeloberfläche heraus, so ist der Rest von der Kugel ebenfalls ein Dreieck mit *denselben Eckpunkten* und *denselben Seiten*. Dazu passt übrigens der folgende Witz:

Ein Schafhirte, ein Physiker und ein Mathematiker bekommen einen Klappzaun und sollen eine Herde Schafe umzäunen. Wie machen sie das?

Der Schafhirte treibt die Schafherde zusammen und baut den Zaun drumherum.

Der Physiker baut den Zaun kreisförmig auf und treibt die Schafherde hinein.

Der Mathematiker baut den Zaun um *sich* herum und sagt: „*Hier* ist außen!“

Durch drei Punkte A , B , C , die nicht auf einem gemeinsamen Großkreis liegen, wird allerdings genau ein *eulersches* Dreieck ABC definiert. Wenn wir also von *dem* Dreieck ABC sprechen, meinen wir in Zukunft immer das eulersche Dreieck mit den Ecken A , B und C .

Das Problem, das *Innere* eines Vielecks oder eines Kreises auf der Kugel zu definieren, ist sehr tiefgehend. In der Ebene verwendet man dazu nämlich unbewußt den berühmten, scheinbar offensichtlichen aber sehr schwer zu beweisenden Satz von Jordan:

Satz 2.27 (Jordan) *Eine geschlossene, sich nicht selbst kreuzende Kurve in der Ebene teilt die Ebene in zwei zusammenhängende Gebiete, deren Rand die Kurve ist. Genau eines der beiden Gebiete ist beschränkt; das andere ist unbeschränkt.*

Man wird jetzt in der Ebene z. B. die drei Seiten eines Dreiecks als geschlossene Kurve betrachten und von den beiden Gebieten, in die die Ebene durch diese Kurve geteilt wird, das beschränkte Gebiet als das Innere des Dreiecks ansehen. Wohlgedenkt: Der Satz von Jordan kann nicht auf der Kugel gelten, da die Sphäre – wie wir oben gesehen haben – beschränkt ist: Zwar teilt eine solche Kurve die Kugel noch in zwei zusammenhängende Gebiete; diese sind aber *beide* beschränkt.

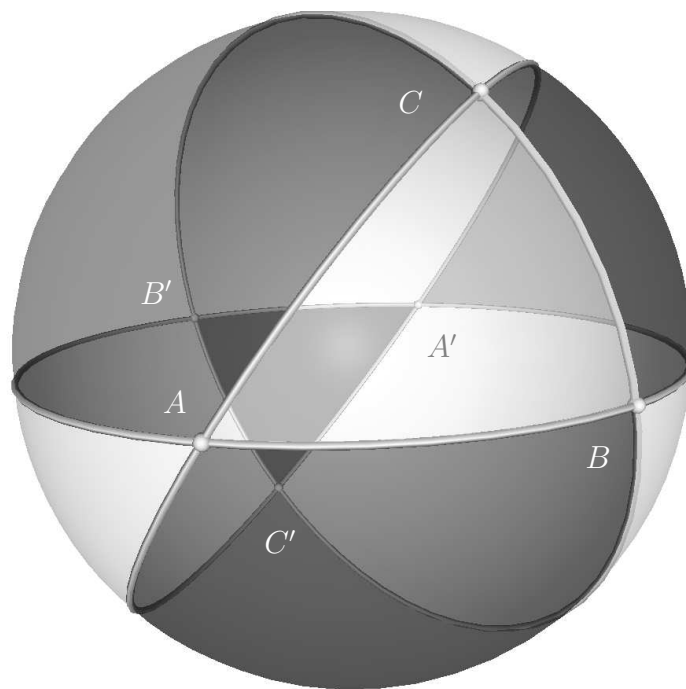


Abbildung 4: Zur Berechnung des Flächeninhalts von Dreiecken auf der Kugel: Die eulerschen Dreiecke ABC' und $A'B'C$ besitzen denselben Flächeninhalt.

Weiters ist es auch nicht mehr richtig, dass ein Dreieck eindeutig durch drei Geraden gegeben ist: Die Kugel wird durch drei Großkreise in acht Dreiecke geteilt. Dabei liegen sich stets zwei „gegenüber“, was wir als Paare von *einander gegenüber liegenden* Dreiecke oder als Paar von *Gegendreiecken* bezeichnen können.

Aufgabe 2.28 Was sollte man als die Winkel im sphärischen Dreieck bezeichnen? Ist die Winkelsumme immer gleich π (180°)?

Aufgabe 2.29 Auf der Sphäre geschieht etwas ganz Merkwürdiges: Man kann den Flächeninhalt eines Dreiecks durch die Winkel ausdrücken! Gib einen Ausdruck für den

Flächeninhalt in Abhängigkeit von den Winkeln des Dreiecks an! (Tipp: Schaue Dir [Abbildung 4](#) ganz genau an und verwende [Aufgabe 2.25](#).)

Aufgabe 2.30 Verwende [Aufgabe 2.29](#), um zu ermitteln, welche Winkelsumme ein entartetes (ein nicht-entartetes) Dreieck auf der Sphäre haben kann!

3 Sphärische Trigonometrie

Auf der Sphäre kann man auch Trigonometrie betreiben. Unser Ziel ist es – wenn möglich – aus drei gegebenen Daten (Winkel, Seitenlängen) eines Dreiecks die jeweils anderen drei zu berechnen. Wie in der Ebene, tut man auch auf der Sphäre gut daran, in einem rechtwinkligen Dreieck zu beginnen: Wir gehen von einem nicht-ausgearteten, eulerschen Dreieck ABC mit einem rechten Winkel bei C aus ($\gamma = \frac{\pi}{2}$). Wir machen die folgende Hilfskonstruktion (vgl. [Abbildung 5](#)):

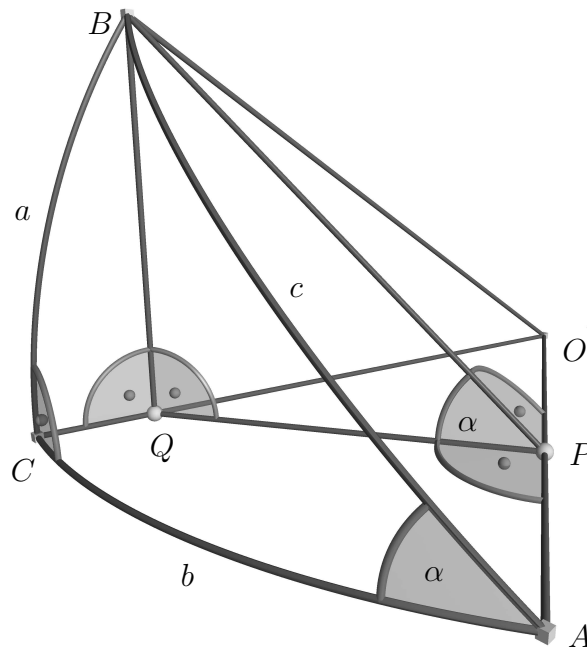


Abbildung 5: Rechtwinkliges Dreieck auf der Kugel mit Hilfskonstruktion.

Sei ε die zur Geraden OA senkrechte Ebene durch B . Bezeichne den Schnittpunkt von ε und OA mit P und den Schnittpunkt von ε mit der Geraden OC mit Q . Mit η bezeichne die Ebene durch O , A und C und mit ξ die Ebene durch O , B und C . Der Winkel BPO misst $\frac{\pi}{2}$. Da γ ein rechter Winkel ist, schließen η und ξ einen rechten Winkel ein. Außerdem schließt nach Konstruktion ε mit η einen rechten Winkel ein. Deshalb ist die Gerade BQ als Schnittgerade von ε und ξ senkrecht zu η , weshalb die Winkel PQB

und OQB rechte sind. Nach Konstruktion ist der Winkel BPQ identisch mit α . Nun folgert man (vgl. [Abbildung 5](#)):

$$\sin \alpha = \frac{|BQ|}{|BP|} = \frac{\sin a}{\sin c} \quad (2)$$

$$\cos \alpha = \frac{|PQ|}{|BP|} = \frac{|OP| \tan b}{|OP| \tan c} = \frac{\tan b}{\tan c} \quad (3)$$

$$\tan \alpha = \frac{|BQ|}{|PQ|} = \frac{|OQ| \tan a}{|OQ| \sin b} = \frac{\tan a}{\sin b} \quad (4)$$

Analog gilt natürlich auch

$$\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c}, \quad \cos \beta = \frac{\tan a}{\tan c} \quad \text{und} \quad \tan \beta = \frac{\tan b}{\sin a},$$

was man genauso zeigt. Weiters kann man aus [Abbildung 5](#) ablesen:

Satz 3.1 (Sphärischer Satz des Pythagoras)

$$\cos c = |OP| = |OQ| \cos b = \cos a \cos b. \quad (5)$$

Verwendet man dies, so erhält man

$$\frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = \frac{\tan a \sin c}{\tan c \sin a} = \frac{\cos c}{\cos a} = \cos b, \quad (6)$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = \frac{\tan b \sin c}{\tan c \sin b} = \frac{\cos c}{\cos b} = \cos a, \quad (7)$$

und hieraus schließlich noch

$$\cos c = \cos a \cos b = \frac{1}{\tan \alpha \tan \beta}. \quad (8)$$

Aufgabe 3.2 Gelten die obigen Gleichungen auch für ausgeartete Dreiecke? Wenn ja, beweise es!

Satz 3.3 (Sinussatz)

In einem eulerschen Dreieck gilt stets:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

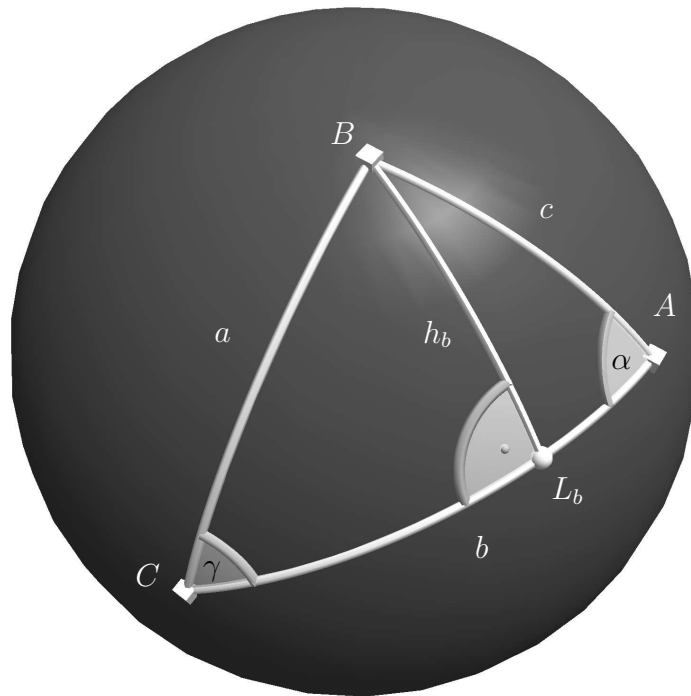


Abbildung 6: Beweisskizze für den Sinus- und den Kosinussatz.

Beweis. Dies kann man genauso wie in der Ebene beweisen! Fäle das Lot von B auf den Großkreis g_b ; der Lotfußpunkt heiße L_b . Dann gilt für die „Höhe“ h_b des Dreiecks (vgl. [Abbildung 6](#)) nach den trigonometrischen Formeln im rechtwinkligen Dreieck einerseits

$$\sin d(B, L_b) = \sin a \sin \gamma$$

und andererseits

$$\sin d(B, L_b) = \sin c \sin \alpha.$$

Dies zeigt $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$. Analog zeigt man den Rest. \square

Mit den bisher gewonnenen trigonometrischen Formeln und den Additionstheoremen für \sin und \cos kann man auch die sphärische Variante des Kosinussatzes zeigen. Er ist für uns besonders wichtig, weil er in einem beliebigen sphärischen Dreieck einen Winkel und seine anliegenden Seiten mit der dem Winkel gegenüberliegenden Seite in Verbindung setzt:

Satz 3.4 (Seitenkosinus-Satz)

In einem eulerschen Dreieck gilt stets

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma. \quad (9)$$

Beweis. Fälle das Lot von B auf g_b mit Lotfußpunkt L_b (natürlich muss L_b *nicht* auf der Seite b des Dreiecks liegen). Die „Hohede“ des Dreiecks bezeichne mit h_b und den Teilbogen von b zwischen C und L_b mit q (vgl. [Abbildung 6](#)). Im rechtwinkligen Teildreieck ABL_b gilt wegen des sphärischen Pythagoras ([Gleichung \(5\)](#))

$$\cos c = \cos h_b \cdot \cos(b - q).$$

Verwendet man das Additionstheorem $\cos(\varphi + \psi) = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi$, so erhält man

$$\cos c = \cos h_b \cos q \cos b + \cos h_b \sin q \sin b. \quad (10)$$

Außerdem gilt wegen des sphärischen Pythagoras im Teildreieck BCL_b

$$\cos a = \cos h_b \cos q, \quad (11)$$

und wegen [Gleichung \(3\)](#) im selben Teildreieck

$$\tan a \cos \gamma = \tan q. \quad (12)$$

Multipliziert man [Gleichung \(11\)](#) und [Gleichung \(12\)](#) miteinander, so bekommt man

$$\sin a \cos \gamma = \cos h_b \sin q \quad (13)$$

und Einsetzen von [Gleichung \(11\)](#) und [Gleichung \(13\)](#) in [Gleichung \(10\)](#) liefert

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma. \quad \square$$

Genauso kann man auch den Winkelkosinussatz beweisen. Wir machen das aber anders im folgenden Abschnitt.

4 Dualisierung

4.1 Konstruktion

Wie uns schon früh aufgefallen ist, gehört zu jedem Punkt sein Gegenpunkt. Wir könnten an dieser Stelle eine neue Geometrie „aufmachen“ und sagen, *Punkte* in dieser neuen Geometrie seien Paare einander gegenüberliegender Punkte auf der Sphäre und die *Geraden* seien die Groskreise. Wir würden dann zu zwei Punkten P und Q in dieser neuen Geometrie die räumlichen Geraden durch die jeweiligen Punktepaare auf der Sphäre (die zwangsläufig durch O verlaufen) betrachten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel als *Abstand* von P und Q definieren.

Uns genügt es aber festzustellen, dass die Sphäre von Natur aus in Zweiergruppchen $\{P, P'\}$ von einander gegenüberliegenden Punkten aufgeteilt ist. Als *duales Objekt* $D(\{P, P'\})$ zum Paar $\{P, P'\}$ auf der Sphäre definieren wir die Mittelsenkrechte g zwischen P und P' . Diese erhalten wie folgt: Wir betrachten die Geraden PP' im Raum;

diese verläuft zwangsläufig durch O . Die Ebene ε_g soll dann diejenige Ebene durch O sein, die senkrecht zu PP' ist; diese schneidet die Sphäre im Großkreis g .

Umgekehrt bezeichnen wir das Punktepaar $\{P, P'\}$ auf der Sphäre als *duales Objekt* $D(g)$ zum Großkreis g , dessen Verbindungsgerade PP' senkrecht zu zur Ebene ε_g durch g ist. Es sind somit Paare einander gegenüberliegender Punkte und Großkreise zueinander dual: *dual* deshalb, weil $DD(X) = X$ gilt, wobei X entweder ein Paar einander gegenüberliegender Punkte oder ein Großkreis sein kann. Zweimal Dualisieren ist sozusagen die Identität.

Dualität ist eine schöne Symmetrie der sphärischen Geometrie: In der Tat kann man wahre Aussagen dualisieren und dadurch zu neuen, ebenso wahren Aussagen gelangen. Als einfaches Beispiel betrachten wir die Aussage

Das Punktepaar $\{P, P'\}$ liegt auf dem Großkreis g .

oder formaler:

$$\{P, P'\} \subset g.$$

Die hierzu duale Aussage ist

Der Großkreis $D(\{P, P'\})$ enthält das Paar $D(g)$.

oder wieder in Formeln:

$$D(\{P, P'\}) \supset D(g).$$

Für ein weiteres Beispiel formulieren wir [Satz 2.9](#) etwas um:

Satz 4.1 *Zwei verschiedene Großkreise schneiden sich stets in genau einem Paar einander gegenüberliegender Punkte.*

Der hierzu duale Satz ist eine Umformulierung von [Satz 2.7](#):

Satz 4.2 *Zwei verschiedene Paare einander gegenüberliegender Punkte liegen stets zusammen auf genau einem Großkreis.*

Aufgabe 4.3 Seien $\{P, P'\}$ und $\{Q, Q'\}$ zwei verschiedene Paare einander gegenüberliegender Punkte auf der Sphäre und $g = D(\{P, P'\})$, $h = D(\{Q, Q'\})$ die dazu dualen Großkreise. In welchem Verhältnis stehen der Winkel zwischen PP' und QQ' und der Winkel zwischen den Großkreisen g und h ? Untersuche dies auch am Kugelmodell!

4.2 Anwendung: Der Winkelkosinussatz

Wir verwenden die Methode der Dualisierung, um den Winkelkosinussatz zu beweisen!

Satz 4.4 (Winkelkosinussatz) *Im eulerschen Kugeldreieck ABC gilt:*

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos c.$$

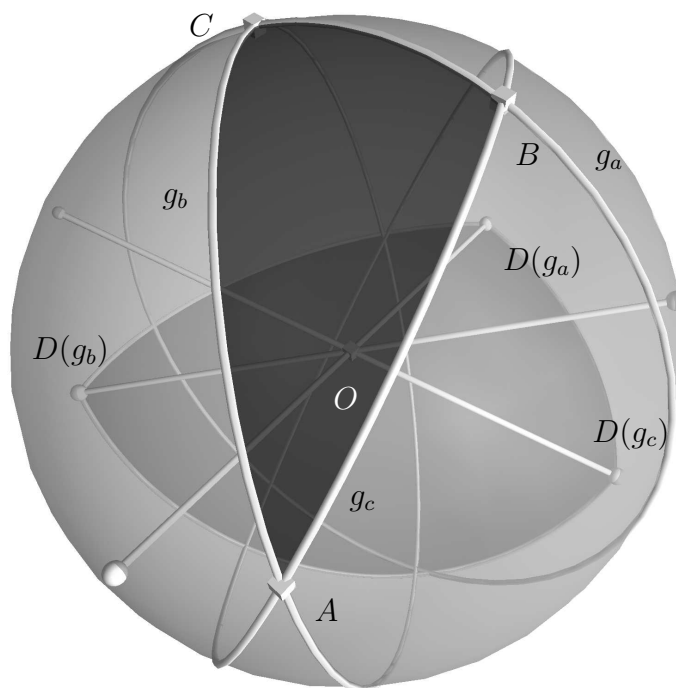


Abbildung 7: Beweisskizze für den Winkelkosinussatz.

Aufgabe 4.5 Beweise [Satz 4.4](#)! Gehe dabei wie folgt vor:

- i) Dualisiere die Großkreise g_a , g_b und g_c ; es entstehen sechs Punkte, die die Sphäre in 8 eulersche Dreiecke einteilen. Finde darin ein Dreieck $P_a P_b P_c$ mit den Seitenlängen $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$ und den Winkeln $\pi - a$, $\pi - b$ und $\pi - c$! (vgl. [Abbildung 7](#)).
- ii) Wende auf das Dreieck $P_a P_b P_c$ den *Seitenkosinussatz* an! Beachte dabei $\cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$!

5 Metrische Räume

5.1 Definitionen

Wir betrachten in diesem letzten Abschnitt sogenannte *metrische Räume* – das sind Räume M , für die eine *Abstandsfunktion* oder auch *Metrik* d definiert sind. Eine solche Abstandsfunktion ordnet einem Paar Punkte P und Q eine reelle Zahl ≥ 0 zu und erfüllt die Bedingungen

- i) Es ist $d(P, Q) = 0$ genau dann, wenn $P = Q$ gilt.
- ii) Es gilt $d(P, Q) = d(Q, P)$ für beliebige Punkte P, Q aus M .
- iii) Für drei beliebige Punkte P, Q, R aus M gilt stets die *Dreiecksungleichung*

$$d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R).$$

Wir haben bereits zwei solcher Räume kennengelernt: Zum Einen gibt es die Ebene \mathbb{R}^2 mit dem üblichen Abstand

$$d_{\mathbb{R}^2}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Zum Anderen kennen wir ja nun auch die Sphäre S^2 mit dem Abstand $d = d_{S^2}$.

Aufgabe 5.1 Vergewissere Dich, dass \mathbb{R}^2 mit $d_{\mathbb{R}^2}$ und S^2 mit d_{S^2} tatsächlich metrische Räume sind!

Definition 5.2 Sei M ein Raum mit der Abstandsfunktion d und sei P ein beliebiger Punkt in M . Der *Ball* $B_r(P)$ mit Radius $r > 0$ um den Punkt P ist die Menge aller Punkt Q in M mit $d(P, Q) < r$.

Auch jede beliebige Teilmenge eines metrischen Raumes ist wieder ein metrischer Raum! Insbesondere ist zum Beispiel die Kreisscheibe $B_r(0)$ in der Ebene mit dem gewöhnlichen Abstand $d_{\mathbb{R}^2}$ auch ein metrischer Raum. Ebenso sind Bälle $B_r(P)$ auf der Sphäre mit dem Abstand d_{S^2} metrische Räume.

Definition 5.3 Seien M und N metrische Räume, mit den Abstandsfunktionen d_M und d_N . Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt *Isometrie*⁵ und man sagt, f sei *isometrisch* oder auch *längentreu*, wenn für beliebige Punkte $P, Q \in M$ gilt:

$$d_M(f(P), f(Q)) = d_N(P, Q).$$

Die Definition besagt also einfach, dass die Entfernung zwischen zwei Punkten beim Abbilden mit einer Isometrie f nicht ändert. Insbesondere wird durch eine Isometrie f ein Ball mit Radius r um den Punkt P wieder in einen Ball mit Radius r um den Punkt $f(P)$ hinein abgebildet.

5.2 Bewegungen

Definition 5.4 Sei M ein metrischer Raum. Eine Isometrie $f: M \rightarrow M$, bei der jeder Punkt von M ein Bildpunkt von f ist, bezeichnet man auch als *Bewegung* des Raumes M .

Zum Beispiel sind Spiegeln an einer Geraden, Drehen um einen Punkt um einen bestimmten Winkel und Verschieben entlang einer Geraden um eine bestimmte Strecke alles Bewegungen der Ebene \mathbb{R}^2 . Man kann auch zeigen, dass jede Bewegung der Ebene durch maximal drei Spiegelungen dargestellt werden kann.

Im Raum \mathbb{R}^3 sind Spiegeln an einer Geraden, Drehen um einen Punkt und Verschieben entlang einer Geraden um eine bestimmte Strecke Bewegungen. Aber auch die Abbildung $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$ ist eine Bewegung. Alle anderen Bewegungen des Raumes kann

⁵*isos* (gr.) bedeutet „gleich“; *metrike* (gr.) bedeutet „Zählung“, „Messung“

man durch Hintereinanderausführen endlich vieler dieser Bewegungen erhalten. Ganz ähnlich wie für die Ebene kann man sogar zeigen, dass jede Bewegung des Raumes durch maximal vier Spiegelungen dargestellt werden kann.

Aufgabe 5.5 Begründe: Jede Bewegung des Raumes, die O festhält, definiert eine Bewegung der Sphäre. Wie sehen solche Bewegungen des Raumes aus? Umgekehrt definiert jede Bewegung der Sphäre eine Bewegung des Raumes, die O festhält.

Aufgabe 5.6 Bei einer Spiegelung im Raum bleiben alle Punkte einer bestimmten Ebene fest liegen: Diese Ebene nennt man *Spiegelebene*. Führt man also auf einer Sphäre eine Spiegelung durch, so bleibt ein Großkreis fest liegen. Gegeben sei ein Großkreis g . Zu einem beliebigen Punkt P auf der Sphäre konstruiere $f(P)$, wobei f diejenige Spiegelung ist, die g fix lässt.

Aufgabe 5.7 Bei einer Drehung im Raum bleibt stets eine Achse fest stehen: Die *Drehachse*. Bei Drehungen der Sphäre bleibt also ein Paar einander gegenüberliegender Punkte fest an seinem Platz. Gegeben seien ein Punkt M auf der Sphäre und ein Drehwinkel φ . Zu einem beliebigen Punkt P auf der Sphäre konstruiere den Bildpunkt von P unter der Drehung f , die M festhält und die Sphäre um den Winkel φ dreht.

Aufgabe 5.8 Vollziehe mit Zirkel und Lineal auf der Kugel nach: Zu einem gegebenen eulerschen Dreieck ABC auf der Sphäre und einem weiteren eulerschen Dreieck $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ mit

$$d(A, B) = d(\tilde{A}, \tilde{B}), \quad d(B, C) = d(\tilde{B}, \tilde{C}) \quad \text{und} \quad d(C, A) = d(\tilde{C}, \tilde{A})$$

gibt es genau eine Bewegung der Sphäre f , so dass $f(A) = \tilde{A}$, $f(B) = \tilde{B}$ und $f(C) = \tilde{C}$. Tipp: Zu einem beliebigen Punkt P konstruiere einen Punkt \tilde{P} mit

$$d(A, P) = d(\tilde{A}, \tilde{P}), \quad d(B, P) = d(\tilde{B}, \tilde{P}) \quad \text{und} \quad d(C, P) = d(\tilde{C}, \tilde{P}).$$

Beobachte dabei, dass es genau einen Punkt \tilde{P} gibt, der das erfüllt. Natürlich muss dann $f(P) = \tilde{P}$ sein.

Definition 5.9 Zwei eulersche Dreiecke ABC und $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ auf der Sphäre heißen *kongruent*, wenn es eine Bewegung der Sphäre gibt, die sie ineinander überführt.

Aus der letzten Aufgabe folgern wir den Satz

Satz 5.10 (Sphärischer Kongruenzsatz SSS)

Stimmen bei zwei eulersche Dreiecken auf der Sphäre sämtliche Seitenlängen überein, so sind sie kongruent.

Aufgabe 5.11 Zeige mit Hilfe des Sinussatzes und der Kosinussätze auf der Sphäre die Kongruenzsätze SWS und WSW für eulersche Dreiecke! (Tipp: Führe dies auf den Kongruenzsatz SSS zurück!)

Zeige durch ein Gegenbeispiel, dass wie in der Ebene ein Kongruenzsatz SSW nicht ohne Einschränkung gültig ist! Gelten WSW und SWS auch für allgemeinere (d. h. auch für nicht-eulersche) Kugeldreiecke?

5.3 Theorema Egregium

Wir wollen nun darangehen und den folgenden berühmten Satz von Carl Friedrich Gauß beweisen:

Satz 5.12 (Theorema Egregium) *Sei P ein beliebiger Punkt der Sphäre S^2 . Selbst für beliebig kleine $R > 0$ ist es nicht möglich, $B_R(P) \subset S^2$ isometrisch in die Ebene abzubilden.*

Beweis. Annahme: Es gibt einen Punkt P , ein $R > 0$ und eine Isometrie $f: B_R(P) \rightarrow \mathbb{R}^2$. Wähle im Ball $B_R(P)$ ein nicht-ausgeartetes, eulersches Dreieck ABC . Weil die Geraden sowohl auf der Sphäre als auch in der Ebene Entfernungen minimieren, werden durch die Isometrie f Großkreisbögen auf Strecken abgebildet. Man erhält also ein Dreieck $f(A)f(B)f(C)$ in der Ebene mit den Winkeln $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ und $\bar{\gamma}$. Wir behaupten, dass $\bar{\alpha} = \alpha$, $\bar{\beta} = \beta$ und $\bar{\gamma} = \gamma$ ist und zeigen dazu lediglich $\bar{\gamma} = \gamma$ (der Rest geht dann genauso.)

Sei $0 < r < d(A, C), d(B, C)$. Definiere A_r und B_r als diejenigen Punkte auf b bzw. a , die von C jeweils den Abstand r haben. Setze $c(r) = d(A_r, B_r)$. Da f eine Isometrie ist, wird das sphärische Dreieck $A_r B_r C$ auf das ebene Dreieck $f(A_r)f(B_r)f(C)$ mit den Seitenlängen r , r und $c(r)$ abgebildet. Der Seitenkosinussatz im sphärischen Dreieck $A_r B_r C$ besagt

$$\cos(c(r)) = \cos^2(r) + \sin^2(r) \cos(\gamma) = \cos^2(r)(1 - \cos(\gamma)) + \cos(\gamma) \quad (14)$$

und der Kosinussatz im ebenen Dreieck $f(A_r)f(B_r)f(C)$ besagt

$$c(r)^2 = r^2 + r^2 - 2rr \cos(\bar{\gamma}) = 2r^2(1 - \cos(\bar{\gamma})). \quad (15)$$

Leitet man beide Gleichungen nach r ab, so erhält man

$$-c'(r) \sin(c(r)) = -2 \cos(r) \sin(r)(1 - \cos(\gamma)) + 0 \quad (14')$$

und

$$2c'(r)c(r) = 4r(1 - \cos(\bar{\gamma})). \quad (15')$$

Nun muss der Quotient der beiden linken Seiten gleich dem Quotienten der beiden rechten Seiten sein. Wenn wir die beiden Quotienten hinschreiben und sie ein wenig vereinfachen und ordnen, erhalten wir

$$\frac{\sin(c(r))}{c(r)} = \cos(r) \frac{\sin(r)}{r} \frac{1 - \cos(\gamma)}{1 - \cos(\bar{\gamma})}.$$

Der Grenzübergang $r \rightarrow 0$ liefert wegen $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sin'(0) = \cos(0) = 1$ und wegen $c(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$:

$$1 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1 - \cos(\gamma)}{1 - \cos(\bar{\gamma})}.$$

Daraus schließen wir, dass $\bar{\gamma} = \gamma$ sein muss.

In [Aufgabe 2.29](#) sollte herausgekommen sein, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABC auf der Sphäre $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ beträgt; da ABC nicht ausgeartet ist, ist der Flächeninhalt echt größer 0. Das heißt, die Winkelsumme des Dreiecks ABC ist stets größer als π (180°). Deshalb müsste, wie wir oben gesehen haben, die Winkelsumme $\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} = \alpha + \beta + \gamma$ des Dreiecks $f(A)f(B)f(C)$ in der Ebene ebenfalls größer als π sein. In der Ebene haben die Dreiecke aber immer eine Winkelsumme von genau π (180°). *Widerspruch*. Unsere Annahme war also falsch. \square