

Grundideen der Fourieranalyse

B. Waldmüller

28. Oktober 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbemerkung	1
2	Die Grundaufgabe	2
3	Funktionenräume	2
4	Übungen	3
5	Der diskrete Fall	4
6	Rekonstruktion eines verrauschten Signales	6
7	Spektralanalyse in der Physik und in der Technik (1)	6
8	Spektralanalyse in der Physik und in der Technik (2)	7
9	Lösung einer Differentialgleichung	8
10	Nachbemerkung	9
11	Literaturhinweise	10

1 Vorbemerkung

Etwa zu Gaußens Lebzeiten wirkte in Frankreich Joseph Fourier. Er beschäftigte sich mit physikalischen Fragen, zum Beispiel mit der Theorie der Wärme. Dabei stieß er auf Differentialgleichungen, und er hatte interessante Ideen, wie er diese lösen könnte. Diese Ideen, die er in einem Buch mit dem Titel *Théorie analytique de chaleur* beschrieb, wurden aufgegriffen und weiterentwickelt. Fourierreihe, Fouriertransformation, FFT (fast Fourier transform) sind Begriffe, denen man häufig begegnet, in der Mathematik wie in Anwendungen.

Ziel dieses Mathematischen Samstages ist, einen Einblick in Fouriers Ideen zu vermitteln und zu zeigen, was man damit machen kann. Er wendet sich an Schüler, besonders der Stufe 13. Sie werden viele alte Bekannte aus dem Unterricht in einer neuen Umgebung wiedertreffen. Es versteht sich aber von selbst, dass der ganze formale Apparat der Funktionalanalysis außen vor bleiben muss; in der Schule gibt es ja nicht einmal einen ausformulierten Stetigkeitsbegriff. Dafür bietet uns der Rechner die Möglichkeit, konkrete Beispiele ausführlich zu behandeln.

Ich will nicht zuviel versprechen – niemand wird nach der Veranstaltung mit dem dort Gelernten eine Firma für Harmonische Analyse aufmachen können – aber auch nicht zu wenig: Fouriers Ideen sind ein faszinierendes Spielzeug, und es lohnt, sich damit zu befassen.

Zwei Personen möchte ich besonders danken: Dr. Andreas von Rhein für wertvolle Hinweise zur Anwendung Fourierscher Ideen in der Physik und Henrik Schumacher, der wieder einmal dafür sorgte, dass das Projekt „Mathematischer Samstag am Söderblom-Gymnasium“ nicht im Sand des Alltagsbetriebes unterging. Dankbar bin ich auch den Leuten des laufenden Kurses der Stufe 13. Sie haben ihre Sachen so gut gelernt, dass ich mich ermutigt fühle, hier über Fouriers Ideen zu reden.

2 Die Grundaufgabe

Es sei eine periodische Funktion f gegeben, also eine Funktion mit der Eigenschaft $f(x+L) = f(x)$ für alle x für eine feste Zahl L . Diese Funktion soll als Reihe einfacher periodischer Funktionen der Periode L geschrieben werden, das sind Funktionen der Form $x \mapsto \sin(k\frac{2\pi}{L}x)$ und $x \mapsto \cos(k\frac{2\pi}{L}x)$ mit natürlichen Zahlen k .

Um den Apparat möglichst einfach zu halten, beschränken wir uns hier auf ungerade Funktionen mit der Periode $L = 2$, dann kommen wir mit den einfachen Funktionen der Form $x \mapsto \sin(k\pi x)$ für natürliche Zahlen k aus, und wir müssen sie nur auf dem Intervall $[0; 1]$ betrachten.

3 Funktionenräume

Zwei Funktionen f und g , die auf dem Intervall $[0; 1]$ definiert sind, kann man addieren und mit einer reellen Zahl r multiplizieren. Das Ergebnis ist wieder eine Funktion mit dem Definitionsbereich $[0; 1]$: Der Funktionswert $s(x)$ der Summe $s = f + g$ ist natürlich $s(x) = f(x) + g(x)$, und der Funktionswert $p(x)$ von $p = rf$ ist $p(x) = rf(x)$. Für $f = (x \mapsto \sin(\pi x))$ und $g = (x \mapsto x^2)$ und $r = 7$ erhalten wir zum Beispiel

$$f + g = (x \mapsto \sin(\pi x) + x^2) \quad \text{und} \quad 7f = (x \mapsto 7 \sin(\pi x)) \quad .$$

Das ist dir im Kern nicht neu. Ich betone das hier nur so, um dich darauf aufmerksam zu machen, dass sich die Funktionen auf $[0; 1]$ wie Vektoren benehmen, das heißt, sie bilden einen **Vektorraum**.

Für unsere Vektoren hatten wir ein Skalarprodukt, und es liegt nahe zu fragen, ob man auch für den Funktionenraum ein solches Skalarprodukt bilden kann. Das kann man in der Tat, wenn man nur hinreichend vernünftige Funktionen zulässt. Und zwar definiert man

$$f * g := \int_0^1 f(x)g(x) dx \tag{1}$$

für hinreichend vernünftige Funktionen auf $[0; 1]$. Dadurch hat man im Raum der vernünftigen Funktionen auf $[0; 1]$ Längen, Winkel und Orthogonalität! Du solltest jetzt nur nicht versuchen, diese Eigenschaften etwa an der Graphen der Funktionen abzulesen; das geht nämlich nicht. Aber schau mal, es gilt das folgende Lemma.

1 Lemma

Für natürliche Zahlen m und n gilt

$$\int_0^1 \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \frac{1}{2} & \text{für } m = n \end{cases} .$$

Das heißt, die Funktionen $x \mapsto \sin(k\pi x)$ für natürliche Zahlen k haben alle die „Länge“ $1/\sqrt{2}$ und sie sind paarweise orthogonal – im Sinne unseres Skalarproduktes.

Wie wir wissen, sind paarweise orthogonale Vektoren $\neq \vec{0}$ linear unabhängig, und man kann sie recht bequem handhaben. Aus der ersten Aussage folgt, dass der Raum der vernünftigen Funktionen auf $[0; 1]$ unendlichdimensional ist. Und mit der bequemen Handhabung verhält es sich so:

2 Lemma

Wir setzen

$$s_k(x) := \sqrt{2} \sin(k\pi x) \quad \text{für } k \in \mathbb{N} .$$

Dann gilt

$$s_m * s_n = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ 1 & \text{für } m = n \end{cases} .$$

3 Lemma

Es sei

$$f = \sum_{k=1}^n a_k s_k$$

eine Linearkombination von s_1, \dots, s_n . Dann ist

$$a_k = f * s_k$$

für $k = 1, 2, \dots, n$.

Die Sache läuft nun so. Es sei eine vernünftige Funktion f auf $[0; 1]$ gegeben. Wir bilden dazu die Funktion

$$f_n = \sum_{k=1}^n (f * s_k) s_k .$$

Diese Funktion f_n ist, geometrisch gesprochen, die Projektion von f auf den von s_1, s_2, \dots, s_n erzeugten Raum. Wenn man nun n groß genug macht, wird der Unterschied $f - f_n$ beliebig klein! Man kann also f mit Hilfe der s_k beliebig genau annähern.

Denke nur nicht, das sei offensichtlich; der große Euler traute der Sache nicht. Man muss die Begriffe „vernünftig“ und „annähern“ präzisieren und beweisen, dass alle vernünftigen Funktionen durch die s_k beliebig genau angenähert werden. Das wurde von Mathematikern nach Fourier geleistet, angefangen von Dirichlet, Riemann und anderen, bis in unsere Zeit, und es ist eine gewaltige Theorie gewachsen, mit der wir uns nicht befassen können. Wir sehen uns Fouriers Methoden an und arbeiten damit einfach an Beispielen.

4 Übungen

Hier habe ich einige Übungen zusammengestellt, die dir zu einer ersten Auseinandersetzung mit dem Gegenstand helfen sollen. Wenn dir die ersten, eher theoretischen Aufgaben nicht zusagen, lässt du sie einfach weg.

Ohne Rechner kommst du nicht weit. Wir benutzen am Söderblom-Gymnasium jetzt MuPAD. In dem Arbeitsblatt `fourier.mn` kannst du nachsehen, wenn du nicht weiterkommst.

Übungen

1. Beweise die Lemmata, prüfe aber jedenfalls die Aussagen der Lemmata mit Hilfe von MuPAD für konkrete Fälle nach.
2. Im allgemeinen Fall benutzt man nicht nur die Sinusfunktionen, sondern auch noch Kosinusfunktionen, weil man sonst nur ungerade Funktionen darstellen könnte. Das erhöht den technischen Aufwand erheblich. Sehr elegant geht das Ganze aber wieder, wenn man komplexe Exponentialfunktionen

$$e_k = (x \mapsto e^{2ik\pi x}) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

auf dem Intervall $[0; 1]$ benutzt. Die Beweise der Lemmas gehen dann erstaunlich leicht. – Gib dich damit aber nur ab, wenn du mit komplexen Zahlen auf einigermaßen vertrautem Fuße stehst.

3. Es sei $f = (x \mapsto x^2)$ und $g = (x \mapsto 3x)$. Berechne $f * g$, $|f|$ und den von f und g „eingeschlossenen Winkel“.
4. Stelle endliche Fourierreihen

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k s_k(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sqrt{2} \sin(k\pi x)$$

für die folgenden Funktionen auf $[0; 1]$ auf und verschaffe dir anhand der Graphen einen Eindruck von der Güte der Näherung. Lasse dir den Graphen der Näherungsfunktion nicht nur auf dem Intervall $[0; 1]$ zeichnen!

- (a) Es sei f die Funktion, deren Graph der Polygonzug mit den Eckpunkten $(0|0)$, $(\frac{1}{2}|1)$ und $(1|0)$ ist.
- (b) $f = (x \mapsto x(1-x))$
- (c) $f = (x \mapsto x(x - \frac{2}{5})(x-1))$
- (d) $f = (x \mapsto x)$
- (e) $f = (x \mapsto 1)$
- (f) Es sei f die Funktion mit $f(x) = 1$ auf $[\frac{2}{5}; \frac{4}{5}]$ und $f(x) = 0$ sonst.

5 Der diskrete Fall

Es mag ja sein, dass die Funktion f , die angenähert werden soll, nur in Form einer Wertetabelle vorliegt. Nehmen wir also an, es seien die $n-1$ Werte

$$f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n-1$$

gegeben. Wir suchen Zahlen a_1, a_2, \dots, a_{n-1} so, dass

$$\sum_{l=1}^{n-1} a_l s_l\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)$$

für $k = 1, 2, \dots, n-1$ gilt. Dies läuft auf die Lösung eines $(n-1) \times (n-1)$ -Gleichungssystems hinaus, der (k, l) -Eintrag der Koeffizientenmatrix ist

$$s_l\left(\frac{k}{n}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{kl}{n}\pi\right) .$$

Man kann den Rechner dieses Gleichungssystem lösen lassen, klar. Aber hier liegt eine besondere Situation vor: Für die Spaltenvektoren

$$\vec{s}_k = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \sin(k\pi/n) \\ \sin(2k\pi/n) \\ \vdots \\ \sin((n-1)k\pi/n) \end{pmatrix}$$

gilt

$$\vec{s}_k * \vec{s}_j = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq j \\ n & \text{für } k = j \end{cases} . \quad (2)$$

Daraus folgt, dass für $k = 1, \dots, n - 1$

$$a_k = \frac{1}{n} \vec{s}_k * \begin{pmatrix} f(1/n) \\ f(2/n) \\ \vdots \\ f((n-1)/n) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n-1} s_k\left(\frac{j}{n}\right) f\left(\frac{j}{n}\right) \frac{1}{n} \quad (3)$$

ist, dabei steht $*$ für das gewöhnliche Skalarprodukt im \mathbb{R}^{n-1} . Der Zusammenhang mit dem in Lemma 2 auf Seite 3 dargestellten Sachverhalt ist offensichtlich.

Wir fassen rezeptartig zusammen: Von einer Funktion f seien die Werte $f(k/n)$ bekannt für $k = 1, 2, \dots, n - 1$. Dann stellen wir $f(x)$ auf $[0; 1]$ näherungsweise dar durch

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k s_k(x) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{n-1} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad (4)$$

mit

$$a_k = \frac{\sqrt{2}}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \sin\left(\frac{jk\pi}{n}\right) f\left(\frac{j}{n}\right) \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n - 1 . \quad (5)$$

Abbildung 1 zeigt ein Beispiel.

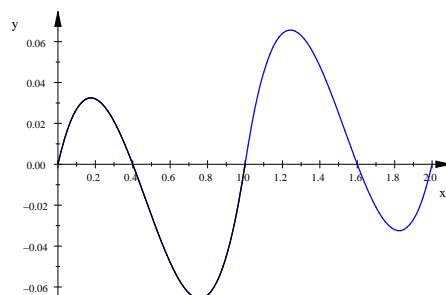


Abbildung 1: Der Graph von f mit $f(x) = x(x - 2/5)(x - 1)$ im Intervall $[0, 1]$ und der Graph der endlichen Fourierreihe mit $n = 20$ im Intervall $[0; 2]$. Die Koeffizienten wurden mit der diskreten Methode berechnet.

Übungen

1. Wenn du dich mit komplexen Zahlen und insbesondere mit n -ten Einheitswurzeln auskennst, kannst du versuchen, die Gültigkeit der Gleichung 2 nachzuweisen. Benutze die Gleichung

$$\sin(x) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) \quad ,$$

man gewinnt sie aus der Euler-Darstellung

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \quad .$$

Sonst kannst du die Gültigkeit für konkrete Fälle mit Hilfe des Rechners nachprüfen.

2. Berechne einige diskrete Näherungen für unsere Beispiele aus den ersten Übungen und vergleiche die Ergebnisse mit den dort erhaltenen.

6 Rekonstruktion eines verrauschten Signales

Ein Signal der Form $y = x(x - 2/5)(x - 1)$, $0 \leq x \leq 1$, wird gesendet und auf dem Weg zum Empfänger durch zufällige Störungen überlagert. Wir wollen versuchen, das ursprüngliche Signal zu rekonstruieren.

Wir teilen das Intervall in $n = 60$ Teilstücke gleicher Länge, berechnen die Funktionswerte unter f der $n - 1$ Teilpunkte und addieren zu jedem Funktionswert einen zufällig gewählten Fehler zwischen -0.05 und 0.05 . Das ist ziemlich viel, die Funktionswerte von f im Intervall $[0; 1]$ liegen ja nur zwischen -0.07 und 0.04 . Zu dem Wertesatz der 59 verfälschten Werte berechnen wir die diskreten Fourierkoeffizienten. Wir bilden aber nur die endliche Fourierreihe der Länge fünf, die anderen Summanden lassen wir weg. Ein Ergebnis zeigt Abbildung 2. Das linke Schaubild zeigt den Graphen von f und den Polygonzug der Punkte, die korrekte x -Werte und verfälschte y -Werte haben. Das rechte Schaubild zeigt den korrekten Graphen (schwarz) und das rekonstruierte Signal (blau).

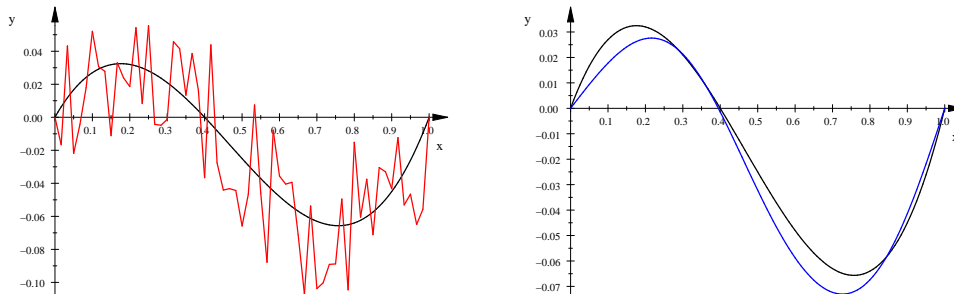


Abbildung 2: Rekonstruktion eines verfälschten Signals

Hinter unserem Vorgehen steckt die Idee, dass die zufälligen Störungen sehr viel schneller oszillieren als die Werte des Signals selbst, dass sie also die Koeffizienten der $\sin(k\pi x)$ mit großem k beeinflussen.

Natürlich kann dieses Beispiel nur die Hoffnung wecken, dass so etwas funktionieren könnte. Die Technik wird aber scheinbar praktisch benutzt, sie wurde vor einigen Jahren bei einem Tag der Offenen Tür an der Universität Paderborn demonstriert.

7 Spektralanalyse in der Physik und in der Technik (1)

Bisher haben wir eine Funktion f im Intervall $[0; 1]$ betrachtet und in diesem Intervall näherungsweise durch eine Funktion F dargestellt, die eine Summe einfacher Sinusfunktionen war. Unser F war dann exakt periodisch, und zwar von der Periodenlänge 2. Wenn f nicht die Periode 2 hat, können wir mit unserem F außerhalb des Intervalls $[0; 1]$ wenig anfangen.

In Physik und Technik hat man mit Signalen zu tun, die in der Regel wegen Störungen nicht exakt periodisch sind, und man fragt nach periodischen Anteilen des Signals. Stelle dir dabei unter einem Signal etwas vor, was du als Kurve auf dem Bildschirm eines Oszilloskopes sehen kannst. Das Wesentliche dabei ist, dass man die Perioden der Anteile nicht kennt.

In unserer Sprache klingt das so: Uns liegt eine Funktion f vor, die auf einem Intervall $[a; b]$ definiert ist, und wir suchen nach periodischen Anteilen unbekannter Periodenlänge von f .

Um solche periodischen Anteile zu entdecken, betrachtet man die Funktion g mit

$$g(t) = \int_a^b f(x)f(x-t) dx \quad . \quad (6)$$

Schauen wir uns die Sache an zwei Beispielen an: Nehmen wir zum einen $f_1(x) = \sin(3x)$ mit $a = 0$ und $b = 5$ und zum anderen $f_2(x) = \sin(3x) + \sin(7x + 2)$ mit $a = 0$ und $b = 10$. Die Graphen von $t \mapsto \int_0^5 f_1(x)f_1(x-t) dx$ und von $t \mapsto \int_0^{10} f_2(x)f_2(x-t) dx$ sind in Abbildung 3 dargestellt.

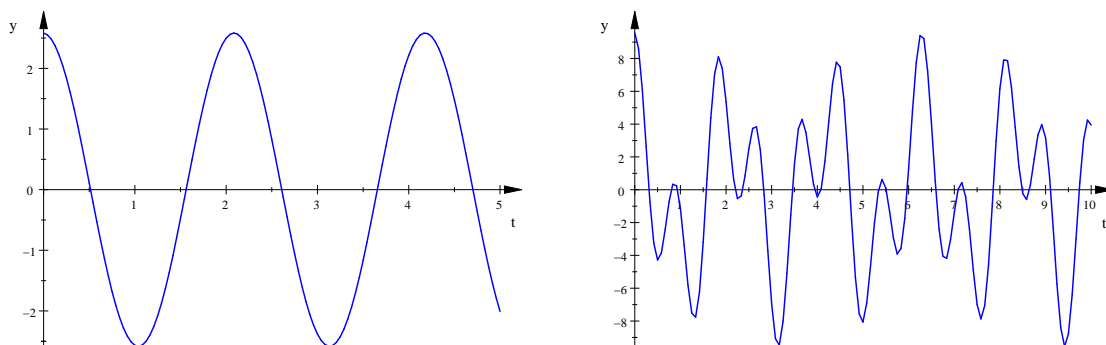


Abbildung 3: Graphen von $t \mapsto \int_0^5 f_1(x)f_1(x-t) dx$ (links) und von $t \mapsto \int_0^{10} f_2(x)f_2(x-t) dx$ (rechts)

Obwohl der Graph im rechten Bild recht wild aussieht, ist aber doch die Differenz der t -Werte benachbarter Hochpunkte fest, und zwar beträgt sie etwa 0.89. Der schneller schwingende Anteil $\sin(7x + 2)$ von $f_2(x)$ hat die Periode $2\pi/7 \approx 0.898$. Die Übereinstimmung ist kein Zufall. Man bildet ja für jedes x das Produkt $f(x)f(x-t)$. Der Graph zu $y = f(x-t)$ ist der Graph von $y = f(x)$, um t nach rechts verschoben. Bei einer periodischen Funktionen nimmt das Integral $g(t)$ immer dann ein Maximum an, wenn t ein Vielfaches der Periodenlänge ist, und ein Minimum, wenn t ein ungerades Vielfaches der halben Periodenlänge ist. Durch Auswertung des Graphen von $g(t)$ mag man also periodische Anteile von $f(x)$ entdecken.

Man kann nur auf Erfolg hoffen, wenn die Länge $b-a$ des Integrationsbereiches deutlich größer ist als die Periodenlänge des Anteils, den die Suche auffinden soll, und wenn die Amplitude des Anteils, verglichen mit den Schwankungen des Restes, groß genug ist.

Übrigens gehen Physiker tatsächlich in der hier angedeuteten Weise vor, sie sprechen dabei von Autokorrelation des Signals.

Übungen

1. Rekonstruiere die Graphen in Abbildung 3 und prüfe die Angaben nach, die im Text stehen.
2. Untersuche entsprechend f mit $f(x) = \sin(2x) + \sin(3x + 4) + 10^{-2}\sin(10x)$. Wähle das Intervall $[a, b]$ selbst.

8 Spektralanalyse in der Physik und in der Technik (2)

Nach Gesprächen mit Sebastian und Henrik hatte ich den Eindruck, dass es ratsam sei, das vorige Kapitel etwas zu ergänzen.

Nach Wikipedia arbeitet man in der Signalverarbeitung mit einer Testgröße der Art

$$g(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x)f(x-t) dx \quad . \quad (7)$$

In der Praxis hat man immer nur Signale endlicher Länge, da kann man natürlich keinen Grenzwert für $T \rightarrow \infty$ bilden. Dennoch ist es sinnvoll, den Grenzwert in die Definition zu schreiben, weil man dadurch die Abhängigkeit der Testgröße vom Integrationsbereich los wird. Man sollte den

Integrationsbereich möglichst groß wählen – das wollten wir ja bei der Wahl von a und b in unserer Gleichung 6 auch beachten – mehr kann man wohl nicht tun.

Durch den Vorfaktor $\frac{1}{2T}$ in Gleichung 7 erreicht man eine Vergleichbarkeit der $g(t)$ -Werte für verschiedene T . Im Idealfall hängt $g(t)$ für genügend große T nicht oder kaum von T ab. Ferner bewirkt der Vorfaktor, dass der Wert $g(0)$ in gewissem Sinne die mittlere Leistung des Signals bedeutet.

Wenn man nach einem praktikablen Messverfahren sucht, kann man an ein Interferometer denken: Das Signal wird mit Hilfe eines Systems von Spiegeln in zwei Teile aufgespalten. Man lässt die beiden Teile verschieden lange Wege zurücklegen und überlagert sie wieder. Durch den Gangunterschied kommt es zu Verstärkungen und zu Auslöschungen der periodischen Anteile, die man hofft beobachten zu können. Die Intensität des so verarbeiteten Signals steckt in einer Größe der Form

$$\left(\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x-t)\right)^2 = \frac{1}{4}f(x)^2 + \frac{1}{2}f(x)f(x-t) + \frac{1}{4}f(x-t)^2 \quad .$$

Integriert man diesen Ausdruck nach x von $-T$ bis T , erhält man im Wesentlichen wieder unsere Testgröße $g(t)$ aus Gleichung 6; die Integrale über $f(x)^2$ und $f(x-t)^2$ sollten für genügend große T proportional zu T sein. Man landet also wieder bei der alten Testgröße!

Nach dieser Diskussion der Testgröße soll das $g(t)$ in der Form von Gleichung 7 an einem weiteren Beispiel erprobt werden. Es sei $f(x) = 3 \sin(3x) + \sin(7x + 2)$. Wir bilden die Testgröße $g(t)$ für $T = 5$ und lassen uns $y = f(x)$ und $y = g(t)$ im Bereich $[0; 10]$ zeichnen (siehe Abbildung 4).

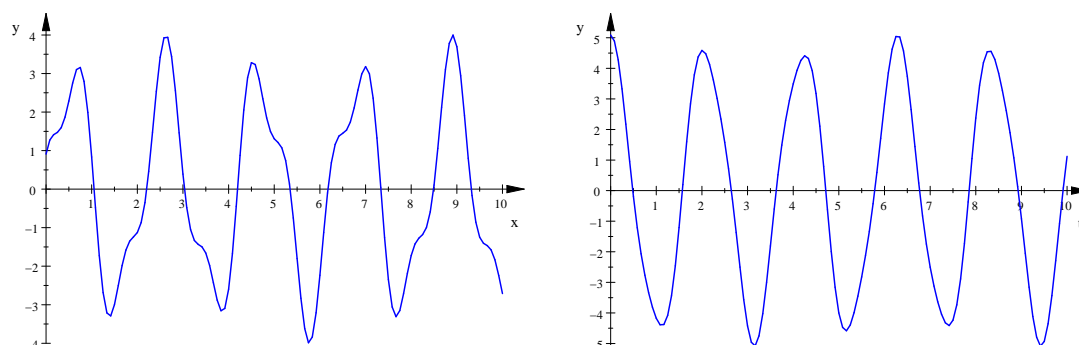


Abbildung 4: Graphen von $y = 3 \sin(3x) + \sin(7x + 2)$ (links) und der zugehörigen Testgröße $g(t)$ mit $T = 5$ (rechts)

Wenn man die mit MuPAD erstellte Grafik anklickt, den Mauszeiger auf einen Punkt des Schaubildes bringt und die linke Maustaste drückt, kann man die Koordinaten des Punktes ablesen. So findet man, dass die x -Koordinate des vierten Hochpunktes im Graphen von $y = g(t)$ den Wert 8.3728 hat. Dividert man 2π durch diesen Wert, ergibt das 3.001; das stimmt sehr gut mit dem Vorfaktor 3 von x im Summanden mit der größeren Amplitude überein.

In der Praxis benutzt man scheinbar Listen von Werten $f(x)$ und $f(x+t)$ und berechnet Korrelationskoeffizienten zu den Listen. Ein großer Korrelationskoeffizient ist ein Hinweis darauf, dass man um ein Vielfaches der Periode eines periodischen Anteils verschoben hat.

9 Lösung einer Differentialgleichung

Joseph Fouriers Differentialgleichungen waren sogenannte partielle Differentialgleichungen; in denen kommen partielle Ableitungen nach verschiedenen Variablen vor. Ich erspare uns das mal und zeige an einer gewöhnlichen Differentialgleichung, wie die Sache funktioniert.

Es sei also f eine vernünftige Funktion, und wir stellen uns die Aufgabe, eine Funktion $y = y(x)$ zu finden, die die Gleichung

$$y'' + y = f(x) \quad (8)$$

erfüllt.

Wir denken uns nun y und f in Fourierreihen entwickelt:

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_k(x) \quad \text{und} \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k s_k(x) \quad . \quad (9)$$

Nun ist – und das ist der Clou des Ganzen –

$$s_k''(x) = -k^2 \pi^2 s_k(x) \quad \text{für } k = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Wenn wir y'' bilden wollen, müssen wir die Reihe zweimal ableiten. Wir gehen nun einfach davon aus, dass wir dies tun können, indem wir die Summanden zweimal ableiten, wie wir es ja von endlichen Reihen kennen, und dass die Summe zweier Reihen die Reihe über die Summe der Summanden ist. In früheren Zeiten hat man bedenkenlos so gerechnet, aber man musste lernen, dass das schiefgehen kann und man Sorgfalt walten lassen muss. Wir erhalten jedenfalls dann für die linke Seite der Differentialgleichung

$$y'' + y = \sum_{k=1}^{\infty} -k^2 \pi^2 a_k s_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - k^2 \pi^2) a_k s_k(x) \quad .$$

Und das soll gleich der rechten Seite

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k s_k(x)$$

sein, und das ist jedenfalls gegeben, wenn

$$(1 - k^2 \pi^2) a_k = b_k$$

ist für $k = 1, 2, \dots$. Der Vorfaktor von a_k kann für keine natürliche Zahl k den Wert 0 annehmen, also ist

$$a_k = \frac{b_k}{1 - k^2 \pi^2} \quad \text{für } k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Wenn wir die b_k kennen, können wir folglich eine Lösung der Differentialgleichung angeben.

10 Nachbemerkung

Wir waren recht unbekümmert und experimentierfreudig, und das müssen Forscher auch sein, wenn sie Neuland betreten, sonst kommen sie nicht voran. In der Mathematik ist dann noch viel Arbeit zu tun. Die Begriffe müssen präzisiert werden und die Voraussetzungen geklärt werden, unter denen die unbekümmerten Schlüsse zu garantiert richtigen Ergebnissen führen. Ich verdeutliche das am Beispiel der Differentialgleichung. Wir haben in der Regel endliche Fourierreihen verwandt, und die stellten die gegebene Funktion nur näherungsweise dar. Wenn wir das hier machen, ersetzen wir die gegebene Differentialgleichung durch eine andere, geringfügig veränderte. Ist eine Lösung der veränderten Gleichung denn „ungefähr“ eine Lösung der Ausgangsgleichung? Das ist keineswegs garantiert, in der Numerischen Mathematik werden solche Fragen intensiv untersucht.

Zweitens: Wie realistisch sind denn die Beispiele gewesen? Klare Antwort: ich weiß es nicht. Reale Probleme haben ihre eigenen Tücken. Wenn ausgedachte Probleme zu guter Mathematik führen, ist das völlig in Ordnung – finde ich jedenfalls.

11 Literaturhinweise

1. Anton Deitmar, A First Course in Harmonic Analysis. Springer: New York 2005
2. Eberhard Zeidler (Hg.), Teubner-Taschenbuch der Mathematik I, II. Teubner: Leipzig 1996, 1995
3. Stichwort „Autokorrelation“ in Wikipedia