

N. G. de Bruijn's Algebraic theory of Penrose's non-periodic
tilings of the plane

BW

8. Juli 2004

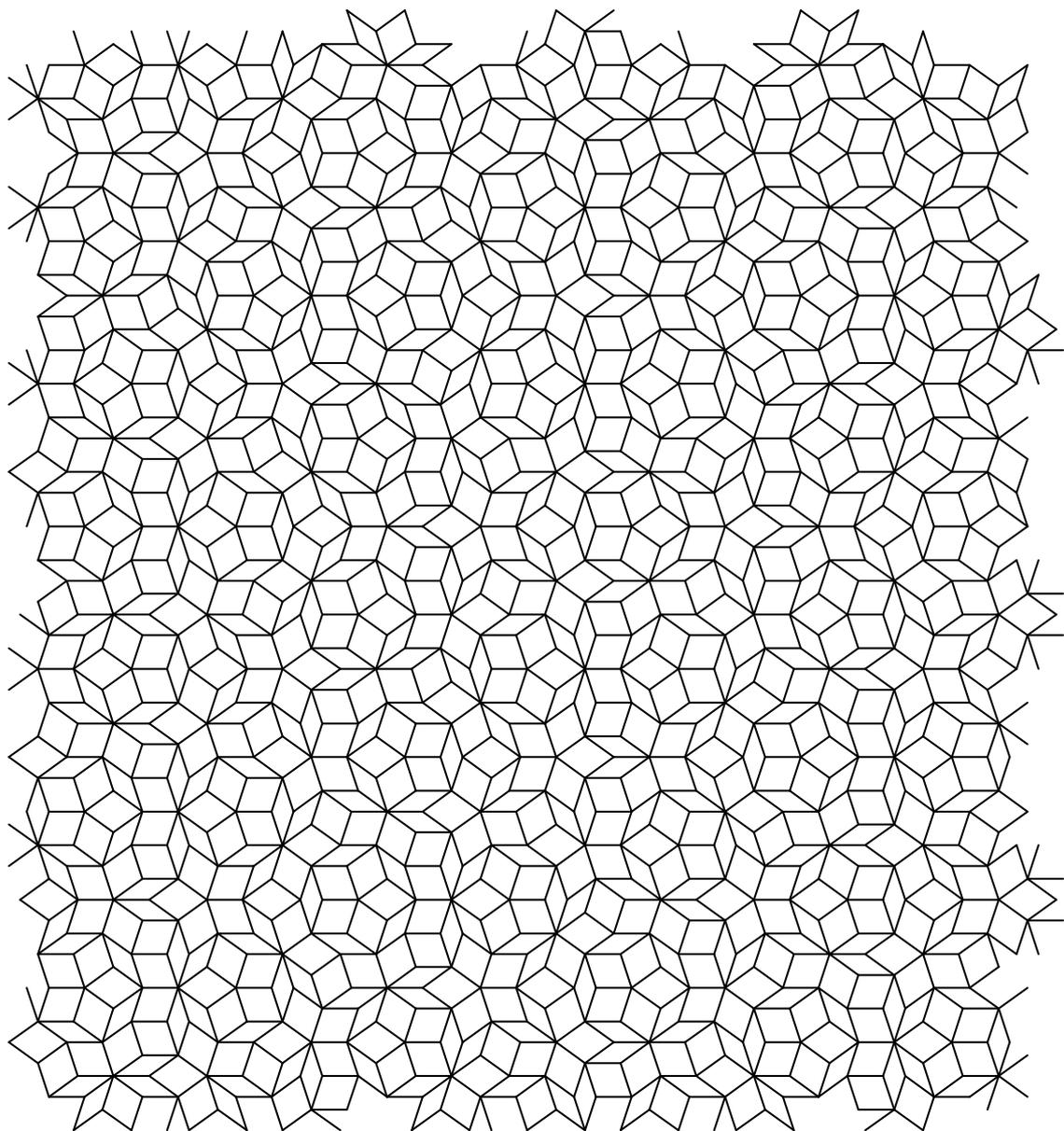


Abbildung 1: Teil eines Penrose-Parketts

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
2	Bausteine N. G. de Bruijns algebraischer Konstruktion	3
2.1	Grundbegriffe	3
2.2	Eigenschaften der Funktionen K_j und f	4
2.2.1	$f(z)$ liegt in der Nähe von $\frac{5}{2}z + \sum_j \gamma_j \zeta^j$	4
2.2.2	Es gilt $\sum_j K_j(z) = \sum_j \lambda_j(z) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$	5
3	Vom Pentagrid zur Rhombenüberdeckung	5
3.1	Pentagrids	5
3.2	Ein konkretes Beispiel	6
3.3	Anmerkungen zu de Bruijns Konstruktion	7
3.4	Das Rhombenparkett überdeckt die ganze Ebene überlappungsfrei	8
4	Geometrische Deutungen	9
4.1	Eine Ebene des \mathbb{R}^5	9
4.2	Beschreibung der Ebene durch Gleichungen	10
4.3	Zweite Deutung	11
5	Theorie	12
5.1	Zusammenhang zwischen $(\gamma_0, \dots, \gamma_4)$ und zugehörigem Pentagrid	12
5.2	Der Parameter ξ	13
5.3	Welche $(\gamma_0, \dots, \gamma_4)$ gehören zu gegebenem ξ ?	13
5.4	Verhalten von Pentagrid, Rhombenparkett und ξ bei Translationen	14
5.5	Rhombenparkette sind nicht periodisch	14
5.6	Drehungen des Pentagrids	15
5.7	Nachweis der Regularität eines Pentagrid	16
5.8	Endliche Teile eines Rhombenparketts kommen in jedem anderen Rhombenparkett vor	18
5.9	Deflation und goldener Schnitt	18
6	Ausblick	19
7	Anhang 1	19
7.1	Konvexe Mengen	19
7.2	$\mathbb{Z}[\zeta]$ ist dicht in \mathbb{C}	19
8	Anhang 2: Arbeitsblätter	20
8.1	Arbeitsblatt: Rhombenpuzzle	20
8.2	Arbeitsblatt: Vom Pentagrid zum Rhombenparkett (topologisch)	23
8.3	Arbeitsblatt: Vom Pentagrid zum Rhombenparkett (geometrisch)	24
8.4	Arbeitsblatt zur Veranschaulichung der Erzeugung des Rhombenparketts mit Hilfe einer Ebene im \mathbb{R}^5	26
8.5	Arbeitsblatt: Von einer Ebene im \mathbb{R}^3 erzeugtes Parkett	27
9	Anhang 3: Ausführliche Besprechung des eindimensionalen Falls	28
9.1	Konstruktion des eindimensionalen Parketts	28
9.2	Verschiebungen des Parketts	28

1 Einführung

Es ist grundsätzlich nicht schwer, die Ebene mit Rhomben zu parkettieren. Aber in den siebziger Jahren des 20. Jahrhunderts entdeckte der britische Mathematiker Roger Penrose, wie man die Ebene mit Rhomben nicht-periodisch überdecken kann, dabei kommt er mit den beiden Rhomben in Abbildung 2 aus. Penroses Parkette sind ästhetisch reizvoll, und es sind faszinierende mathe-

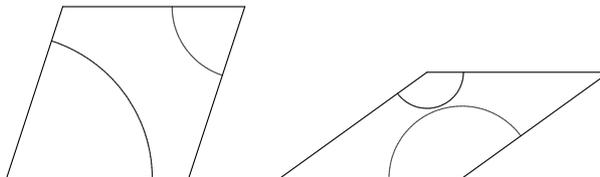


Abbildung 2: Penroses Rhomben *thick* (links, Winkel 72° und 108° , Kantenlänge 1) und *thin* (rechts, Winkel 36° und 144° , Kantenlänge 1). Die Rhomben dürfen nur so verklebt werden, dass die Kreise passen.

matische Objekte mit verblüffenden Eigenschaften. Die Abbildung 1 zeigt einen Ausschnitt aus einem solchen Parkett.

Wer einen allgemeinen, gut lesbaren Überblick über das Thema sucht, schaue in den schönen Artikel von Martin Gardner in [3]. Der niederländische Mathematiker N. G. de Bruijn gibt in [1] eine algebraische Konstruktion der Penrose-Parkette, und er weist damit auch ihre Eigenschaften nach. Dabei benutzt er ausgiebig Handwerkszeug, das dem Berufsmathematiker zu Gebote steht. Mit anderen Worten: der Artikel ist nicht gerade leicht lesbar. Ich möchte hier de Bruijns Weg nachspüren und den geometrischen Kern der Konstruktion möglichst gut zugänglich machen. Die Arbeitsblätter in Kapitel 8 sollen dabei eine wesentliche Hilfe sein. Im Hauptteil des Textes steht im Grunde, was ich mir aus de Bruijns Artikel erlesen habe.

Wo es irgend geht, vereinfache ich. Zum Beispiel lasse ich die Orientierung der Kanten der Rhomben außer Acht, die erzwingen, dass man ein nicht-periodisches Parkett erhält. Die Pentagrids sorgen automatisch dafür, dass das Parkett nicht-periodisch ist.

Soviel ich weiß, regten Penroses Entdeckungen Kristallographen an, in der Natur und im Labor gezielt nach „Kristallen“ mit fünfzähliger Drehsymmetrie zu suchen, und sie wurden tatsächlich schnell fündig. Dabei konnte es sich nicht um klassische Kristalle handeln, denn die können keine fünfzähligen Drehsymmetrien aufweisen. Man nennt diese Stoffe Quasikristalle, sie werden seit ihrer Entdeckung intensiv erforscht. Eine erste Information über Quasikristalle findet man auf der Seite Michael Feuerbachers (siehe [2]), eines Physikers des Forschungszentrums Jülich.

2 Bausteine N. G. de Bruijns algebraischer Konstruktion

2.1 Grundbegriffe

Wichtigstes Hilfsmittel bei de Bruijns Konstruktion von Penrose-Parketten ist die primitive fünfte Einheitswurzel

$$\zeta := \exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right) . \quad (1)$$

Die Zahlen $1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$ sind paarweise verschiedene Lösungen der Gleichung $x^5 - 1 = 0$. Es folgt, dass

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x - \zeta)(x - \zeta^2)(x - \zeta^3)(x - \zeta^4)$$

ist, und daraus ergibt sich sofort

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = 0 . \quad (2)$$

Zu jedem Satz reeller Zahlen

$$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \sum_{j=0}^4 \gamma_j = 0 \quad (3)$$

konstruiert de Bruijn eine Überdeckung der Ebene durch Rhomben. Dazu braucht er auf \mathbb{C} definierte Funktionen K_j und λ_j :

$$K_j(z) := \lceil \Re(z\zeta^{-j}) + \gamma_j \rceil \quad \text{und} \quad (4)$$

$$\lambda_j(z) := K_j(z) - \Re(z\zeta^{-j}) - \gamma_j \quad \text{für } j = 0, \dots, 4. \quad (5)$$

Die Werte $K_j(z)$ sind stets ganzzahlig, und es gilt stets $0 \leq \lambda_j(z) < 1$.

Nach diesen Vorbereitungen definiert de Bruijn die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$f(z) := \sum_{j=0}^4 K_j(z)\zeta^j \quad . \quad (6)$$

2.2 Eigenschaften der Funktionen K_j und f

2.2.1 $f(z)$ liegt in der Nähe von $\frac{5}{2}z + \sum_j \gamma_j \zeta^j$

Mit Hilfe der λ_j schreiben wir die K_j in der Form

$$K_j(z) = \Re(z\zeta^{-j}) + \gamma_j + \lambda_j(z) \quad . \quad (7)$$

Damit formen wir $f(z)$ um.

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_j K_j(z)\zeta^j \\ &= \sum_j (\Re(z\zeta^{-j}) + \gamma_j + \lambda_j(z)) \zeta^j \\ &= \sum_j \Re(z\zeta^{-j})\zeta^j + \sum_j (\gamma_j + \lambda_j(z)) \zeta^j \end{aligned}$$

Die erste Summe der letzten rechten Seite bearbeiten wir weiter.

$$\begin{aligned} \sum_j \Re(z\zeta^{-j})\zeta^j &= \sum_j \frac{1}{2}(z\zeta^{-j} + \overline{z\zeta^{-j}})\zeta^j \\ &= \frac{1}{2} \sum_j z + \frac{1}{2} \sum_j \overline{z\zeta^{-j}}\zeta^j \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5z + \frac{1}{2} \overline{z} \sum_j \zeta^{2j} \\ &= \frac{5}{2}z \quad , \end{aligned}$$

denn es gilt $\overline{\zeta^{-j}} = \zeta^j$ und $\sum_{j=0}^4 \zeta^{2j} = \sum_{j=0}^4 \zeta^j$.

Daraus folgt insgesamt, dass

$$f(z) = \frac{5}{2}z + \sum_j \gamma_j \zeta^j + \sum_j \lambda_j(z)\zeta^j \quad (8)$$

ist. Die mittlere Summe hängt nicht von z ab, bewirkt also nur eine Verschiebung des ganzen Bildes $f(\mathbb{C})$. Die rechte Summe ist betragsmäßig höchstens $\sum_j \lambda_j(z)|\zeta^j| = \sum_j \lambda_j < 5$, und deshalb ist die Aussage in der Überschrift berechtigt. Wir werden noch genauer bestimmen, welche Werte $\sum_j \lambda_j \zeta^j$ annehmen kann - siehe Gleichung 16.

2.2.2 Es gilt $\sum_j K_j(z) = \sum_j \lambda_j(z) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Mit dem oben schon benutzten Ausdruck für $K_j(z)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_j K_j(z) &= \sum_j (\Re(z\zeta^{-j}) + \gamma_j + \lambda_j(z)) \\ &= \Re(z \sum_j \zeta^{-j}) + \sum_j \gamma_j + \sum_j \lambda_j(z) \\ &= 0 + 0 + \sum_j \lambda_j(z) . \end{aligned}$$

Da die $K_j(z)$ ganzzahlig sind und stets $0 \leq \lambda_j(z) < 1$ ist, muss der Wert der letzten rechten Seite eine der Zahlen 0, 1, 2, 3 oder 4 sein.¹

3 Vom Pentagrid zur Rhombenüberdeckung

3.1 Pentagrids

Der geometrische Kern des Apparats, der in Kapitel 2 aufgebaut wurde, sieht so aus: Wir beginnen mit der durch

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \in \mathbb{Z}\}$$

gegebenen Schar paralleler Geraden in der komplexen Ebene, verschieben die Schar um γ_j nach links und drehen anschließend um den Winkel $j\frac{2\pi}{5}$ um den Nullpunkt. Wenn wir dies für $j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ durchführen, erhalten wir insgesamt das durch den Wertesatz $\gamma_0, \dots, \gamma_4$ bestimmte Pentagrid. Es besteht also aus fünf Scharen jeweils paralleler Geraden.

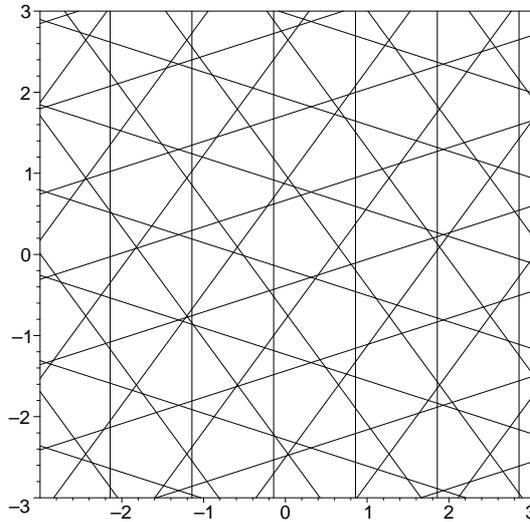


Abbildung 3: Ausschnitt aus dem Pentagrid zu dem Wertesatz $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ mit $\gamma_0 = \frac{1}{7} \approx$

$$0.14, \quad \gamma_1 = \frac{\sqrt{5}}{13} \approx 0.17, \quad \gamma_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.47, \quad \gamma_3 = \frac{11}{19} \approx 0.58, \quad \gamma_4 = -\gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 \approx -1.37$$

Ein $z \in \mathbb{C}$ liegt genau dann auf einer Geraden der j -ten Schar, wenn $\lambda_j(z) = 0$ ist, und für alle z eines (offenen) Streifens der j -ten Schar ist $K_j(z)$ gleich. Es folgt, dass alle z des Innern einer Masche des Pentagrids den gleichen Wert $f(z)$ haben.

¹Der Wert 0 kann nur als Ergebnis auftreten, wenn alle $\lambda_j(z) = 0$ sind, wenn also von jeder der fünf Scharen eine Gerade durch z geht. Wir beschäftigen uns nur mit Pentagrids, wo sich niemals mehr als zwei Schargeraden in einem Punkt schneiden. Für diese Pentagrids ist dann stets $\sum_j K_j(z) \in \{1, 2, 3, 4\}$.

3.2 Ein konkretes Beispiel

Sehen wir uns an einem Beispiel an, wie man vom Pentagrid zur Rhombenüberdeckung kommt. Wir nehmen einen kleinen Ausschnitt aus dem Pentagrid, das uns schon vorher begegnet ist, und wählen in jeder Masche einen Punkt. Dies ist in Abbildung 4 dargestellt.

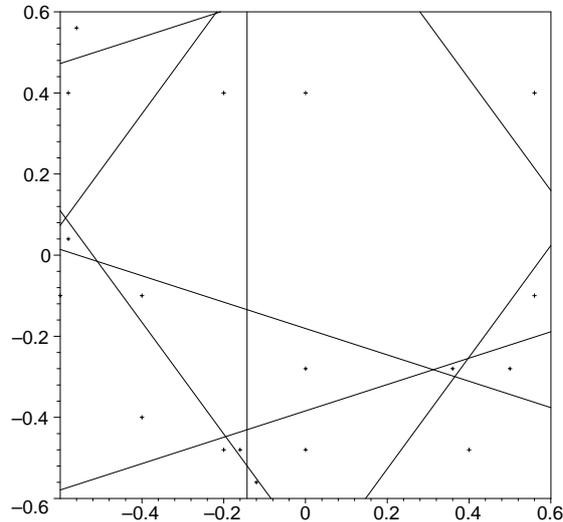


Abbildung 4: Das Pentagrid aus Abbildung 3 im Gebiet $(-0.6, 0.6) \times (-0.6, 0.6)$, in jeder Masche ist ein Punkt gewählt

Alle inneren Punkte einer Masche haben den gleichen Funktionswert unter f , das gesamte in Abbildung 4 dargestellte Gebiet wird unter f also auf eine endliche Punktmenge abgebildet. Haben zwei benachbarte Maschen eine Kante gemeinsam, die auf einer Geraden z. B. der 2-ten Schar liegt, liegen ihre Punkte jeweils in benachbarten Streifen der 2-ten Schar. Die K_2 -Werte der Punkte beider Maschen unterscheiden sich also um 1. Für $j \neq 2$ jedoch haben die Punkte beider Maschen den gleichen K_j -Wert. Dies ergibt sich aus der Konstruktion des Pentagrids. Zur Illustration sind hier die in Abbildung 4 markierten Punkte und ihre K_j -Werte aufgelistet².

z	$K_0(z)$	$K_1(z)$	$K_2(z)$	$K_3(z)$	$K_4(z)$
$(-0.58, 0.4)$	0	1	2	1	-1
$(-0.2, 0.4)$	0	1	1	1	-1
$(0, 0.4)$	1	1	1	1	-1
$(0.56, 0.4)$	1	1	1	0	-1
$(-0.58, 0.04)$	0	1	1	2	-1
$(-0.4, -0.1)$	0	0	1	1	-1
$(0.56, -0.1)$	1	1	0	1	-1
$(0, -0.28)$	1	0	1	1	-1
$(0.36, -0.28)$	1	1	1	1	0
$(0.5, -0.28)$	1	1	0	1	0
$(-0.4, -0.4)$	0	0	1	2	-1
$(-0.2, -0.48)$	0	0	1	2	0
$(-0.16, -0.48)$	0	0	1	1	0
$(0, -0.48)$	1	0	1	1	0
$(0.4, -0.48)$	1	0	0	1	0
$(-0.12, -0.56)$	1	0	1	2	0

Wenn wir uns nun daran erinnern, dass $f(z) = \sum_j K_j(z)\zeta^j$ ist, erkennen wir, dass sich die Bildpunkte $f(z_1)$ und $f(z_2)$ nur um eine fünfte Einheitswurzel unterscheiden, wenn z_1 und z_2 im

²Die Daten wurden, wie die Zeichnungen auch, mit Maple erstellt – siehe `mathe/maple8/deBruijn.mws`

Innern benachbarter Maschen liegen. Nehmen wir uns einen Knoten des Pentagrids, in dem sich genau zwei Schargeraden schneiden, sagen wir, eine aus der i -ten und eine aus der k -ten Schar. Dieser Knoten ist dann von vier Maschen umgeben. Wir umlaufen den Knoten auf einem Kreis, der ganz in der Vereinigung der vier Maschen liegt, und schauen uns an, wie sich die $f(z)$ -Werte der Kreispunkte dabei verhalten. Beim ersten Übertritt der i -Geraden mag $f(z)$ um ζ^i zunehmen. Dann wird die k -Gerade überquert, dabei ändert sich $f(z)$ weiter um $\pm\zeta^k$, dann um $-\zeta^i$, schließlich um $\mp\zeta^k$. Die vier Bildpunkte bilden also entweder einen Rhombus der Art $0, \zeta^i, \zeta^i + \zeta^k, \zeta^k$ oder der Art $0, \zeta^i, \zeta^i - \zeta^k, -\zeta^k$. Der Winkel, den die Strecken vom Nullpunkt zu ζ^i und vom Nullpunkt zu $\pm\zeta^k$ bilden, ist ein Vielfaches von 36° , aber weder 0° noch 180° , denn i und k sind ja verschieden. Also ist es einer der Winkel $36^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 144^\circ$, und der Rhombus ist einer der Rhomben *thick* oder *thin* in Abbildung 2.

Auf diese Weise kommt de Bruijn vom Pentagrid zur Rhombenüberdeckung. Die $f(z)$ -Werte der Maschen des Pentagrids sind die Knoten der Rhombenüberdeckung. Die Rhomben selbst erhalten wir, wenn wir immer die $f(z)$ -Punkte verbinden, die zu Maschen gehören, die eine Kante gemeinsam haben. Das funktioniert problemlos, wenn sich nie mehr als zwei Schargeraden in einem Punkt schneiden.

Für das Gebiet aus Abbildung 4 ist diese Voraussetzung erfüllt, wir zeichnen mit Hilfe von Maple das Rhombenbild (siehe Abbildung 5).

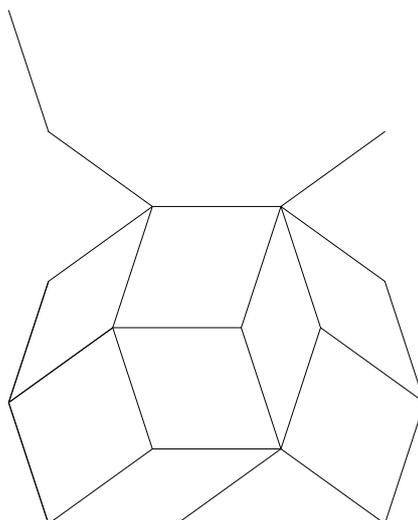


Abbildung 5: Rhombenbild des Pentagridgebietes in Abbildung 4

3.3 Anmerkungen zu de Bruijns Konstruktion

Das im Beispiel behandelte Verfahren funktioniert allgemein, solange gewährleistet ist, dass sich niemals mehr als zwei Geraden des Pentagrids in einem Punkt schneiden. Pentagrids, die diese Bedingung erfüllen, nennt de Bruijn **regulär**. Wir wollen uns nur mit regulären Pentagrids beschäftigen.

Beschreiben wir einmal die Stationen des Wegs. Ausgangspunkt ist ein Vektor $(\gamma_0, \dots, \gamma_4)^t \in \mathbb{R}^5$.³ Mit Hilfe dieses Vektors definiert de Bruijn für $j = 0, \dots, 4$ Funktionen $K_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{Z}$, und mit Hilfe dieser Funktionen schließlich die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Wir können die Funktion f in zwei Schritten ausführen. Zunächst haben wir es mit einer Funktion

$$K : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{Z}^5 : z \mapsto (K_0(z), K_1(z), K_2(z), K_3(z), K_4(z)) \quad (10)$$

³de Bruijn verlangt, dass $\sum_j \gamma_j = 0$ ist, er lässt also nur Vektoren aus einer Hyperebene des \mathbb{R}^5 zu. Seine Konstruktion funktioniert aber zunächst für beliebige Vektoren des \mathbb{R}^5 .

zu tun, die von dem Wertesatz $\gamma_0, \dots, \gamma_4$ abhängt. Anschließend wird die Funktion

$$\mathbb{Z}^5 \rightarrow \mathbb{C}: (s_0, \dots, s_4) \mapsto \sum_{j=0}^4 s_j \zeta^j \quad (11)$$

ausgeführt. Die zweite Funktion hängt nicht von den γ_j ab! Das heißt, dass alle Parkette ihre Knoten in der Menge

$$\mathbb{Z}[\zeta] = \left\{ \sum_{j=0}^4 s_j \zeta^j \mid s_j \in \mathbb{Z} \right\} \quad (12)$$

haben.

3.4 Das Rhombenparkett überdeckt die ganze Ebene überlappungsfrei

Wir umlaufen den Nullpunkt auf einem Kreis um den Nullpunkt mit (sehr großem) Radius R , der nicht durch Schnittpunkte von Geraden des Pentagrid gehen soll. Die Kreislinie wird durch ihre Schnittpunkte mit Geraden des Pentagrid in eine Anzahl von Bögen zerlegt. Alle Punkte der Kreislinie, die im Innern eines solchen Bogens liegen, werden unter f auf den gleichen Knoten des Rhombenparketts abgebildet, und die Knoten, die zu benachbarten Bögen gehören, sind durch eine Kante des Rhombenparketts verbunden, denn die Bögen liegen ja in benachbarten Maschen des Pentagrid. Wenn also z die Kreislinie durchläuft, hüpft $f(z)$ von Knoten zu Knoten eines geschlossenen Kantenzuges des Rhombenparketts.

Aus Gleichung 8 auf Seite 4 wissen wir, dass die Differenz von $f(z)$ und $\frac{5}{2}z + \sum_j \gamma_j \zeta^j$ betragsmäßig höchstens 4 ist. Der Kantenzug muss also $\eta := \sum \gamma_j \zeta^j$ umlaufen, und zwar in der Nähe des Kreises um η mit Radius $\frac{5}{2}R$. Mit Sicherheit liegt der Kantenzug ganz zwischen den Kreisen um η mit den Radien $\frac{5}{2}R + 5$ und $\frac{5}{2}R - 5$.

Wir verkleinern R nun allmählich, und überlegen uns, was geschieht, wenn der Kreis dabei Schnittpunkte von Geraden des Pentagrid passiert. Die Situation ist in Abbildung 6 dargestellt. Zwei Gittergeraden schneiden sich in einem Punkt, der zunächst im Innern der Kreisscheibe liegt.

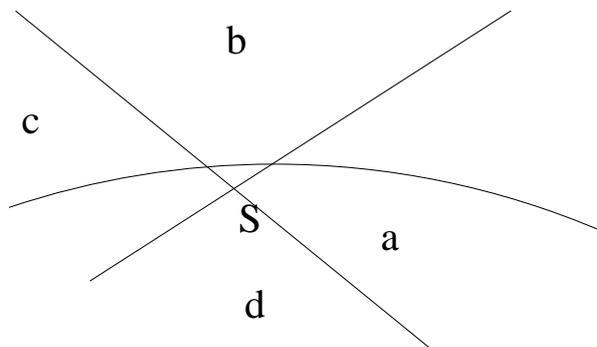


Abbildung 6: Stück eines Kreises um den Nullpunkt in der Pentagridebene

Die Kreislinie verlaufe beispielsweise zunächst durch die Maschen a, b und c . Der Kantenzug verbindet dann die benachbarten Knoten $f(a), f(b)$ und $f(c)$, und die beiden Kanten, die die Punkte verbinden, gehören zu dem Kantenzug. Wenn wir R verkleinern, wird die Kreislinie den Schnittpunkt der Gittergeraden passieren, und sie mag dann durch die Maschen a, d und c laufen. Der Kantenzug verbindet dann $f(a)$ mit $f(c)$ über $f(d)$ und nicht mehr über $f(b)$. Der Rhombus mit den Knoten $f(a), f(b), f(c), f(d)$, der vorher zum Innern des Gebiets gehörte, das vom Kantenzug eingeschlossen wurde, liegt nun draußen. Und so geht das immer weiter, Rhombus um Rhombus. Wie wir noch sehen werden, kann man stets dafür sorgen, dass sich zwei Gittergeraden im Nullpunkt schneiden. In diesem Fall besteht der Kantenzug schließlich nur noch aus dem Rand eines einzigen Rhombus.

So sehen wir ein, dass das Rhombenparkett tatsächlich die ganze Ebene überdeckt und dass sich niemals zwei Rhomben überlappen.

4 Geometrische Deutungen

Wir gehen davon aus, dass die reellen Zahlen $\gamma_0, \dots, \gamma_4$ ein reguläres Pentagrid bestimmen und das zugehörige Rhombenmuster mit Hilfe der K_j und f konstruiert ist, und schauen nach einer geometrischen Deutung der Konstruktion.

4.1 Eine Ebene des \mathbb{R}^5

Beginnen wir mit der Gleichung 7. Für $z = z_1 + z_2i \in \mathbb{C}$ ist

$$\begin{aligned} K_j(z) &= \Re(z\zeta^{-j}) + \gamma_j + \lambda_j(z) \\ &= z_1\Re(\zeta^{-j}) - z_2\Im(\zeta^{-j}) + \gamma_j + \lambda_j(z) \\ &= z_1\Re(\zeta^j) + z_2\Im(\zeta^j) + \gamma_j + \lambda_j(z) \quad \text{für } j = 0, \dots, 4 \end{aligned}$$

oder, etwas umgeformt und vektoriell geschrieben,

$$\begin{pmatrix} K_0(z) - \lambda_0(z) \\ \vdots \\ K_4(z) - \lambda_4(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_4 \end{pmatrix} + z_1 \begin{pmatrix} \Re(\zeta^0) \\ \vdots \\ \Re(\zeta^4) \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} \Im(\zeta^0) \\ \vdots \\ \Im(\zeta^4) \end{pmatrix} . \quad (13)$$

Auf der rechten Seite steht ein Vektor aus einer bestimmten zweidimensionalen Ebene des \mathbb{R}^5 . Wenn z ganz \mathbb{C} durchläuft, durchläuft dieser Vektor die ganze Ebene.

Schauen wir uns nun die linke Seite der Gleichung 13 an. Da wir uns nur mit regulären Pentagrids befassen, verschwinden nie mehr als höchstens zwei der $\lambda_j(z)$, und wir können gegebenenfalls z ein klein wenig abändern, so dass alle $\lambda_j(z)$ positiv sind, ohne dass sich die $K_j(z)$ ändern.

Jedem Fünftupel (k_0, \dots, k_4) ganzer Zahlen ordnet de Bruijn in natürlicher Weise eine Einheitszelle des \mathbb{R}^5 zu. Ihre inneren Punkte sind die $(x_0, \dots, x_4)^t \in \mathbb{R}^5$ mit $k_j - 1 < x_j < k_j$ für $j = 0, \dots, 4$. Auf der linken Seite von Gleichung 13 steht also ein innerer Punkt der Zelle zu $(K_0(z), \dots, K_4(z))^t$. Umgekehrt gilt: Wenn die rechte Seite von Gleichung 13 einen inneren Punkt der zu $(k_0, \dots, k_4)^t \in \mathbb{Z}^5$ gehörigen Zelle darstellt, dann ist $k_j = K_j(z_1 + z_2i)$ für $j = 0, \dots, 4$, der Punkt $\sum k_j \zeta^j$ ist dann also Knoten des Parketts.

Damit ist der Grund für folgende **geometrische Deutung** gelegt. Es gibt eine bestimmte zweidimensionale Ebene des \mathbb{R}^5 , erzeugt durch $(\Re(\zeta^0), \dots, \Re(\zeta^4))^t$ und $(\Im(\zeta^0), \dots, \Im(\zeta^4))^t$. Man verschiebt diese Ebene um den Vektor $(\gamma_0, \dots, \gamma_4)^t$ der γ_j , die das reguläre Pentagrid bestimmen, aus dem Nullpunkt. Jede Einheitszelle des \mathbb{R}^5 , der einen inneren Punkt mit der verschobenen Ebene gemeinsam hat, bestimmt eine Masche des Pentagrids bzw. einen Knoten des Parketts.

Diese geometrische Deutung lässt sich noch in faszinierender Weise ausbauen. Dazu benötigen wir ein technisches Lemma.

Lemma 1 Die beiden Vektoren $\vec{a} := (\Re(\zeta^0), \dots, \Re(\zeta^4))^t$ und $\vec{b} := (\Im(\zeta^0), \dots, \Im(\zeta^4))^t$, die wir eben zum Erzeugen einer Ebene des \mathbb{R}^5 benutzt haben, haben beide die Länge $\sqrt{5}/2$, und sie sind orthogonal zueinander!

Beweis Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0i = \sum_j \zeta^{2j} = \sum_j (\zeta^j)^2 \\ &= \sum_j (\Re(\zeta^j) + \Im(\zeta^j)i)^2 \\ &= \sum_j (\Re(\zeta^j)^2 - \Im(\zeta^j)^2) - 2i \sum_j \Re(\zeta^j)\Im(\zeta^j) . \end{aligned}$$

Die zweite Summe muss =0 sein, daraus folgt $\vec{a} * \vec{b} = 0$. Nun nutzen wir noch aus, dass $\Re(\zeta^j)^2 + \Im(\zeta^j)^2 = 1$ ist:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_j (\Re(\zeta^j)^2 - \Im(\zeta^j)^2) \\ &= \sum_j (1 - 2\Im(\zeta^j)^2) \\ &= 5 - 2 \sum_j \Im(\zeta^j)^2 \quad \text{bzw.} \\ &= 2 \sum_j \Re(\zeta^j)^2 - 5 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $\vec{a} * \vec{a} = \vec{b} * \vec{b} = \frac{5}{2}$. □

Wir schauen uns an, wie die Projektion eines Vektors $\vec{K} := (K_0(z), \dots, K_4(z))^t$ in die von \vec{a} und \vec{b} erzeugte Ebene aussieht. Sie ist von der Form $z_1\vec{a} + z_2\vec{b}$, und für die Vorfaktoren z_1, z_2 gilt:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2}{5} \vec{K} * \vec{a} = \frac{2}{5} \sum_j K_j(z) \Re(\zeta^j) \\ z_2 &= \frac{2}{5} \vec{K} * \vec{b} = \frac{2}{5} \sum_j K_j(z) \Im(\zeta^j) \end{aligned}$$

Wenn man also alle Punkte aus \mathbb{Z}^5 , die diejenigen Zellen bestimmen, die von der durch Gleichung 13 gegebenen Ebene in einem inneren Punkt geschnitten werden, in die von \vec{a} und \vec{b} erzeugte Ebene projiziert, erhält man bis auf eine zentrische Streckung genau das Muster der Knoten des Parketts!

4.2 Beschreibung der Ebene durch Gleichungen

In seiner Arbeit beschreibt de Bruijn die Ebene von Gleichung 13 durch die Gleichungen⁴

$$\begin{aligned} \sum_j x_j &= 0 \\ \sum_j (x_j - \gamma_j) \Re(\zeta^{2j}) &= 0 \\ \sum_j (x_j - \gamma_j) \Im(\zeta^{2j}) &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Es sei $(x_0, \dots, x_4)^t \in \mathbb{R}^5$ ein Vektor der Ebene in unserer Gleichung 13. Seine Einträge erfüllen die erste von de Bruijns Gleichungen, denn $\sum_j \gamma_j = 0$ und $\sum_j \zeta^j = 0$. Dass auch die beiden anderen Gleichungen erfüllt sind, sehe ich so: Es ist $\sum_j \zeta^{2j} \zeta^j = \sum_j \zeta^{3j} = 0$ und $\sum_j \zeta^{-2j} \zeta^j = \sum_j \zeta^{-j} = 0$. Für die Realteile heißt das $\sum_j (\Re(\zeta^{2j}) \Re(\zeta^j) \mp \Im(\zeta^{2j}) \Im(\zeta^j)) = 0$, und daraus ergibt sich leicht $\sum_j \Re(\zeta^{2j}) \Re(\zeta^j) = 0$ und $\sum_j (\Im(\zeta^{2j}) \Im(\zeta^j)) = 0$. Betrachtet man nun noch die Imaginärteile, bekommt man in gleicher Weise die Beziehungen $\sum_j \Re(\zeta^{2j}) \Im(\zeta^j) = 0$ und $\sum_j \Im(\zeta^{2j}) \Re(\zeta^j) = 0$. Es ist einfach so, dass de Bruijn die Ebene mit Hilfe von Normalenvektoren beschreibt.

Beachten wir noch, dass $\sum_j \zeta^j = \sum_j \zeta^{2j} = 0$ ist und dass aus $0 = \vec{a} * \vec{b} = \sum_j \Re(\zeta^j) \Im(\zeta^j)$ auch $\sum_j \Re(\zeta^{2j}) \Im(\zeta^{2j}) = 0$ folgt, denn es ist ja $\{\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^5\} = \{\zeta^2, \zeta^4, \dots, \zeta^{10}\}$, können wir folgendes Lemma notieren.

Lemma 2 Die Vektoren \vec{a} und \vec{b} aus Lemma 1 bilden zusammen mit den Vektoren $(1, 1, 1, 1, 1)^t$, $(\Re(\zeta^{2 \cdot 0}), \dots, \Re(\zeta^{2 \cdot 4}))^t$ und $(\Im(\zeta^{2 \cdot 0}), \dots, \Im(\zeta^{2 \cdot 4}))^t$ eine Basis des \mathbb{R}^5 aus paarweise orthogonalen Vektoren.

⁴Siehe (7.1) bis (7.3) auf Seite 49

4.3 Zweite Deutung

Schauen wie uns für ein $z \in \mathbb{C}$ noch einmal die Gleichung 13 an. Der Vektor

$$\vec{v} := \begin{pmatrix} K_0(z) \\ \vdots \\ K_4(z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_0(z) \\ \vdots \\ \lambda_4(z) \end{pmatrix}$$

gehört zum Erzeugnis von \vec{a} und \vec{b} , ist also zu den übrigen drei Vektoren aus der Basis aus Lemma 2 orthogonal. Die drei Skalarprodukte von \vec{v} mit den drei Basisvektoren können wir dann so aufschreiben:

$$\begin{aligned} \sum_j K_j(z) - \sum_j \lambda_j(z) - \sum_j \gamma_j &= 0 \\ \sum_j (K_j(z) - \gamma_j) \Re(\zeta^{2j}) &= \sum_j \lambda_j(z) \Re(\zeta^{2j}) \\ \sum_j (K_j(z) - \gamma_j) \Im(\zeta^{2j}) &= \sum_j \lambda_j(z) \Im(\zeta^{2j}) \end{aligned}$$

Die erste Gleichung sagt nur, dass $\sum_j \lambda_j(z) = \sum_j K_j(z)$ ist, das wissen wir schon. Wir wissen darüber hinaus, dass der gemeinsame Wert dieser Summen eine der Zahlen 1, 2, 3, 4 ist. Die beiden nächsten Gleichungen fassen wir so zusammen:

$$\sum_j (K_j(z) - \gamma_j) \zeta^{2j} = \sum_j \lambda_j(z) \zeta^{2j} \quad (15)$$

Kehren wir die Sache nun um!

Lemma 3 *Es sei $(k_0, \dots, k_4)^t \in \mathbb{Z}^5$ und $(\lambda_0, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^5$ mit*

1. $0 < \lambda_j < 1$ für $j = 0, \dots, 4$
2. $\sum_j k_j = \sum_j \lambda_j \in \{1, 2, 3, 4\}$
3. $\sum_j (k_j - \lambda_j) \zeta^{2j} = \sum_j \lambda_j \zeta^{2j}$

Dann gibt es ein $z \in \mathbb{C}$ so, dass $k_j = K_j(z)$ ist für $j = 0, \dots, 4$.

Beweis Weil $\sum_j \lambda_j = 0$ ist, garantieren die zweite und die dritte Bedingung der Voraussetzung, dass der Vektor $(k_0 - \lambda_0 - \gamma_0, \dots, k_4 - \lambda_4 - \gamma_4)$ zu den Vektoren $(1, 1, 1, 1, 1)^t$, $(\Re(\zeta^{2 \cdot 0}), \dots, \Re(\zeta^{2 \cdot 4}))^t$ und $(\Im(\zeta^{2 \cdot 0}), \dots, \Im(\zeta^{2 \cdot 4}))^t$ orthogonal ist. Also liegt er im Erzeugnis von \vec{a} und \vec{b} . Daraus folgt, dass es Zahlen z_1 und z_2 so gibt, dass

$$\begin{pmatrix} k_0 - \lambda_0 \\ \vdots \\ k_4 - \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_4 \end{pmatrix} + z_1 \vec{a} + z_2 \vec{b}$$

ist. Weil die λ_j zwischen 0 und 1 liegen, ist nun $(k_0, \dots, k_4) = f(z_1 + z_2 i)$. □

Man bestimmt nun für $m \in \{1, 2, 3, 4\}$ jeweils die Menge

$$V_m := \left\{ \sum_j \lambda_j \zeta^{2j} \mid \sum_j \lambda_j = m \text{ und } 0 < \lambda_j < 1 \text{ für } j = 0, \dots, 4 \right\} . \quad (16)$$

Dann hat man ein bequemes Kriterium, ob ein $(k_0, \dots, k_4) \in \mathbb{Z}^5$ mit $m = \sum_j k_j \in \{1, 2, 3, 4\}$ zu einem Knoten des Parketts gehört. Wir formulieren das Kriterium als Satz⁵.

⁵de Bruijns Theorem 8.1 auf Seite 51

Lemma 4 Genau dann gehört $(k_0, \dots, k_4) \in \mathbb{Z}^5$ zu einer Masche des regulären Pentagrids zu $\gamma_0, \dots, \gamma_4$, wenn gilt

$$m = \sum_j k_j \in \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{und} \quad \sum_j (k_j - \gamma_j) \zeta^{2j} \in V_m \quad .$$

In de Bruijns Arbeit sind die V_i beschrieben. Die Lage der Prüfzahl $\sum_j (k_j - \gamma_j) \zeta^{2j}$ im entsprechenden V_m gibt sogar Auskunft über die Art des Knotens $\sum_j k_j \zeta^j$ des Parketts. Hier geben wir aber zunächst nur de Bruijns Beschreibung der V_m .

Lemma 5 Die in Gleichung 16 definierten Mengen V_m sehen wie folgt aus.

1. V_1 ist das Innere des Fünfecks mit den Ecken $1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$.
2. V_2 ist das Innere des Fünfecks mit den Ecken $1 + \zeta, \zeta + \zeta^2, \zeta^2 + \zeta^3, \zeta^3 + \zeta^4, \zeta^4 + 1$.
3. $V_3 = -V_2$
4. $V_4 = -V_1$

Das Programm, mit dem das Bild auf Seite 1 erstellt wurde, arbeitet mit den Aussagen von Lemma 4 und Lemma 5.

5 Theorie

5.1 Zusammenhang zwischen $(\gamma_0, \dots, \gamma_4)$ und zugehörigem Pentagrid

Durch die Zahlen $\gamma_0, \dots, \gamma_4$ ist das Pentagrid festgelegt, aber es ist so, dass verschiedene Sätze γ_j und γ_j^* das gleiche Pentagrid festlegen können. Hier wird untersucht, wann das der Fall ist, und wie sich eine Verschiebung des Pentagrids auf die γ_j auswirkt.

Lemma 6 Es seien $\gamma_0, \dots, \gamma_4$ und $\gamma_0^*, \dots, \gamma_4^*$ reelle Zahlen, $\sum_j \gamma_j = \sum_j \gamma_j^* = 0$, und G und G^* die durch diese Zahlen bestimmten Pentagrids. Dann ist

$$G^* = G \iff \gamma_j - \gamma_j^* \in \mathbb{Z} \quad \text{für } j = 0, \dots, 4.$$

Beweis Es ist $G = \bigcup_j G_j$ und $G^* = \bigcup_j G_j^*$ mit

$$G_j = \{(r_1 + r_2 i - \gamma_j) \zeta^j \mid r_1 \in \mathbb{Z}, r_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$G_j^* = \{(r_1^* + r_2^* i - \gamma_j^*) \zeta^j \mid r_1^* \in \mathbb{Z}, r_2^* \in \mathbb{R}\}$$

für $j = 0, \dots, 4$. Genau dann ist $G = G^*$, wenn $G_j = G_j^*$ ist für $j = 0, \dots, 4$, und das ist genau dann der Fall, wenn $\gamma_j - \gamma_j^* \in \mathbb{Z}$ ist für $j = 0, \dots, 4$. \square

Lemma 7 Es seien $\gamma_0, \dots, \gamma_4$ reelle Zahlen mit Summe 0, G das durch diese Zahlen bestimmte Pentagrid und $G^* = G + z_0$ das um ein $z_0 \in \mathbb{C}$ verschobene Pentagrid. Dann wird $G^* = G + z_0$ durch

$$\gamma_j^* = \gamma_j - \Re(z_0 \zeta^{-j}) \quad \text{für } j = 0, \dots, 4 \tag{17}$$

beschrieben.

Beweis Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Lemma 6 ist

$$G^* = G + z_0 = \bigcup_j \{(r_1 + r_2 i - \gamma_j) \zeta^j + z_0 \mid r_1 \in \mathbb{Z}, r_2 \in \mathbb{R}\} \quad .$$

Wir formen etwas um.

$$(r_1 + r_2 i - \gamma_j) \zeta^j + z_0 = (r_1 + r_2 i - \gamma_j + z_0 \zeta^{-j}) \zeta^j = (r_1 + r_2^* i - \gamma_j + \Re(z_0 \zeta^{-j})) \zeta^j \quad ,$$

dabei ist $r_2^* = r_2 + \Im(z_0 \zeta^{-j}) \in \mathbb{R}$. Daraus folgt die Behauptung. \square

5.2 Der Parameter ξ

Wir beginnen wieder mit einem Wertesatz $(\gamma_0, \dots, \gamma_4)$, der ein reguläres Pentagrid und das zugehörige Rhombenparkett erzeugt. Das Rhombenparkett ist durch eine zweidimensionale Ebene des \mathbb{R}^5 vollständig bestimmt. Gleichung 13 gibt den allgemeinen Vektor dieser Ebene an, wir halten uns aber jetzt an die Gleichungen der Ebene in 14 auf Seite 10. Die zweite und die dritte der drei Gleichungen fassen wir durch Verwendung komplexer Zahlen zu einer zusammen und lösen noch die Klammern auf. Dann steht da als Beschreibung der Ebene

$$\begin{aligned} \sum_j x_j &= 0 \\ \sum_j x_j \zeta^{2j} - \sum_j \gamma_j \zeta^{2j} &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{18}$$

Also hängt die Ebene, und damit das Rhombenparkett, nur von der komplexen Zahl

$$\xi := \sum_j \gamma_j \zeta^{2j} \tag{19}$$

ab, und dies sogar eindeutig:

Lemma 8 *Es sei U bzw. U^* die Menge der Knoten des Rhombenparketts, das durch die komplexen Parameter ξ bzw. ξ^* bestimmt ist. Dann ist*

$$U = U^* \iff \xi = \xi^* \quad . \tag{20}$$

Zum **Beweis**: Wenn $\xi \neq \xi^*$ ist, sind die durch ξ bzw. ξ^* bestimmten Ebenen im \mathbb{R}^5 in gewissem Sinne parallel: es handelt sich ja um die gleiche Ebene durch den Nullpunkt, die nur an (wesentlich) verschiedenen Stützvektoren befestigt sind. Ich verstehe de Bruijns Begründung⁶ so: Da die Menge der $\sum_j r_j \zeta^j$ mit $r_0, \dots, r_4 \in \mathbb{Z}$ dicht liegt in \mathbb{C} , gibt es Punkte dieser Menge, die „zwischen“ den Ebenen liegen. Deshalb gibt es Einheitszellen im \mathbb{R}^5 , die nur von einer der beiden Ebenen in einem inneren Punkt geschnitten werden, U und U^* können dann nicht gleich sein.

Die andere Richtung ist klar. □

In den folgenden Abschnitten wird untersucht, in welcher Weise ξ die Eigenschaften des Rhombenparketts festlegt.

5.3 Welche $(\gamma_0, \dots, \gamma_4)$ gehören zu gegebenem ξ ?

Die γ_j , aus denen ξ berechnet wird, bilden in der Gleichung 13 einen Stützvektor dieser zweidimensionalen Ebene im \mathbb{R}^5 , die das Rhombenparkett festlegt. Anstelle dieses Vektors können wir jeden anderen Vektor

$$\begin{pmatrix} \gamma_0^* \\ \vdots \\ \gamma_4^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_4 \end{pmatrix} + z_1 \begin{pmatrix} \Re(\zeta^0) \\ \vdots \\ \Re(\zeta^4) \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} \Im(\zeta^0) \\ \vdots \\ \Im(\zeta^4) \end{pmatrix}$$

der Ebene als Stützvektor nehmen. In der Tat ist das zugehörige

$$\xi^* = \sum_j \gamma_j \zeta^{2j} + z_1 \sum_j \Re(\zeta^j) \zeta^{2j} + z_2 \sum_j \Im(\zeta^j) \zeta^{2j} = \sum_j \gamma_j \zeta^{2j} = \xi \quad ,$$

der Wert von ξ und damit das Rhombenparkett bleiben erhalten.

Wir wollen auch die Pentagrids betrachten, die zu (γ_j) und zu (γ_j^*) gehören. Es ist

$$\gamma_j^* = \gamma_j + z_1 \Re(\zeta^j) + z_2 \Im(\zeta^j) = \gamma_j + z_1 \Re(\zeta^{-j}) - z_2 \Im(\zeta^{-j}) = \gamma_j + \operatorname{Re}((z_1 + z_2 i) \zeta^{-j}) \quad ,$$

das Pentagrid G^* der γ_j^* ergibt sich also nach Lemma 7 aus dem Pentagrid G der γ_j durch Verschiebung um $-z_1 - z_2 i$.

⁶S. 54f

5.4 Verhalten von Pentagrid, Rhombenparkett und ξ bei Translationen

Stellen wir einmal zusammen, was wir bisher wissen. Ausgangspunkt ist ein Fünftupel $(\gamma_0, \dots, \gamma_4)$ reeller Zahlen mit Summe 0, das ein Pentagrid G und ein Rhombenparkett definiert. Mit U bezeichnen wir die Menge der Knoten des Rhombenparketts. Wir verändern zum einen die γ_j um ganze Zahlen r_j , $j = 0, \dots, 4$ mit $\sum_j r_j = 0$, zum andern um $\Re(-z_0\zeta^{-j})$, $j = 0, \dots, 4$ für eine komplexe Zahl z_0 .

$$\begin{array}{ccccc}
 G & \xlongequal{\quad} & G & \xrightarrow{\tau_{z_0}} & G + z_0 \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 (\gamma_j + r_j, j = 0, \dots, 4) & \xleftarrow{\quad} & (\gamma_j, j = 0, \dots, 4) & \xrightarrow{\quad} & (\gamma_j - \Re(z_0\zeta^{-j}), j = 0, \dots, 4) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \xi + \sum_j r_j \zeta^{2j} & \xleftarrow{\tau_{\sum r_j \zeta^{2j}}} & \xi & \xlongequal{\quad} & \xi \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 U + \sum_j r_j \zeta^j & \xleftarrow{\tau_{\sum r_j \zeta^j}} & U & \xlongequal{\quad} & U
 \end{array} \tag{21}$$

5.5 Rhombenparkette sind nicht periodisch

Wir können nun begründen, dass unsere Rhombenparkette eine sehr erstaunliche Eigenschaft haben: sie sind nicht periodisch. Das heißt: Es ist nicht möglich, ein Rhombenparkett durch eine Verschiebung in sich zu überführen.

Da alle Knoten eines Rhombenparketts in der Form $\sum_j r_j \zeta^j$ mit ganzen Zahlen r_j , $j = 0, \dots, 4$ geschrieben werden können und eine Verschiebung Knoten in Knoten überführen muss, kommt nur eine Verschiebung um eine komplexe Zahl in Betracht, die eben diese Form

$$v = \sum_j t_j \zeta^j \quad \text{mit } t_j \in \mathbb{Z} \text{ für } j = 0, \dots, 4 \tag{22}$$

hat. Dies ist leicht einzusehen. Nicht so offensichtlich ist, dass $\sum_j t_j = 0$ sein muss. Der Grund ist, dass die Zahl $\sum_j r_j$ eines Knotens $\sum_j r_j \zeta^j$ bei der Verschiebung erhalten bleiben muss.

Wenn das betrachtete Rhombenparkett durch $(\gamma_0, \dots, \gamma_4)$ bestimmt ist, erhalten wir das um v verschobene Parkett, indem wir von $(\gamma_0^*, \dots, \gamma_4^*)$ mit $\gamma_j^* = \gamma_j + t_j$ ausgehen. Aber das neue Parkett hat die Kennzahl $\xi^* = \xi + \sum_j t_j \zeta^{2j}$; die Verschiebung überführt das Parkett nur in sich, wenn $\sum_j t_j \zeta^{2j} = 0$ ist. Daraus folgt aber, wie in Lemma 9 begründet wird, dass auch $\sum_j t_j \zeta^j = 0$ ist, die Verschiebung folglich die identische Abbildung ist.

Lemma 9 Für $q_0, \dots, q_4 \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\sum_j q_j \zeta^j = 0 \iff \sum_j q_j \zeta^{2j} = 0 \quad .$$

Beweis Zum Beweis muss ich eine beträchtliche Menge Algebra aufbieten, und zwar Körpertheorie⁷. Die fünfte Einheitswurzel ζ ist Nullstelle des Polynoms $x^5 - 1$. Da $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ ist, ist ζ auch Nullstelle von $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Es gibt aber kein Polynom kleineren Grades mit rationalen Koeffizienten, das ζ als Nullstelle hätte. Diese Tatsache benutzen wir nun.

⁷Mit Hilfe dieser Theorie beweist man auch, dass die klassischen griechischen Probleme wie die Dreiteilung eines beliebigen Winkels und die Verdopplung des Würfels nicht mit Zirkel und Lineal lösbar sind.

Es sei nun $\sum_j q_j \zeta^j = 0$ für $q_j \in \mathbb{Q}$ für $j = 0, \dots, 4$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_j q_j \zeta^{2j} &= q_2 \zeta^4 + q_4 \zeta^3 + q_1 \zeta^2 + q_3 \zeta + q_0 = 0 \\ q_2 \sum_j \zeta^j &= q_2 \zeta^4 + q_2 \zeta^3 + q_2 \zeta^2 + q_2 \zeta + q_2 = 0 \quad . \end{aligned}$$

Subtrahieren wir die beiden Gleichungen, erhalten wir eine Gleichung höchstens dritten Grades mit rationalen Koeffizienten, die ζ als Lösung hat. Daraus folgt, dass alle Koeffizienten dieser Gleichung $= 0$ sein müssen, also $q_2 = q_3 = q_4 = q_1 = q_0 = 0$ ist.

Die umgekehrte Richtung ist klar, denn $\sum_{j=0}^4 \zeta^j = \sum_{j=0}^4 \zeta^{2j}$. □

5.6 Drehungen des Pentagrids

Es sei $(\gamma_0, \dots, \gamma_4)$ unser Fünftupel reeller Zahlen mit Summe 0, G das durch diesen Satz bestimmte Pentagrid, $\xi = \sum \gamma_j \zeta^{2j}$ die Kennzahl, die das zugehörige Rhombenparkett bestimmt, und U die Menge der Knoten dieses Rhombenparketts. Wir wollen das Pentagrid drehen. Damit wieder ein zulässiges Pentagrid dabei herauskommt, muss der Drehwinkel ein Vielfaches von $2\pi/5$ sein; wir können die Drehung also durch (eventuell mehrfache) Multiplikation mit ζ realisieren.

Was wird aus der j -ten Geradenschar G_j des Pentagrids?

$$G_j \zeta = \{(r_1 + r_2 i - \gamma_j) \zeta^j \mid r_1 \in \mathbb{Z}, r_2 \in \mathbb{R}\} \zeta = \{(r_1 + r_2 i - \gamma_j) \zeta^{j+1} \mid r_1 \in \mathbb{Z}, r_2 \in \mathbb{R}\}$$

Wir erhalten offensichtlich ein neues Pentagrid G^* , das durch $(\gamma_0^*, \dots, \gamma_4^*) = (\gamma_4, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ beschrieben wird.

Es ist nicht schwierig, das ξ^* zu berechnen, das zu den γ_j^* gehört:

$$\xi^* = \sum_j \gamma_j^* \zeta^{2j} = \gamma_4 + \gamma_0 \zeta^2 + \gamma_1 \zeta^4 + \gamma_2 \zeta^6 + \gamma_3 \zeta^8 = \zeta^2 (\gamma_0 + \gamma_1 \zeta^2 + \gamma_2 \zeta^4 + \gamma_3 \zeta^6 + \gamma_4 \zeta^8) = \zeta^2 \xi \quad .$$

Aber wie sieht es mit dem Rhombenparkett U^* aus? Es sei $z \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\begin{aligned} K_j(z) &= [\Re(z \zeta^{-j}) + \gamma_j] \\ &= [\Re(z \zeta^{-j}) + \gamma_{j-4}^*] \\ &= [\Re(z \zeta^{-j+4} \zeta^{-4}) + \gamma_{j-4}^*] \\ &= [\Re(z \zeta \cdot \zeta^{-(j-4)}) + \gamma_{j-4}^*] \\ &= K_{j-4}^*(z \zeta) \quad . \end{aligned}$$

Wir berechnen $f^*(z \zeta)$.

$$\begin{aligned} f^*(z \zeta) &= \sum_j K_j^*(z \zeta) \zeta^j \\ &= \sum_j K_{j+4}(z) \zeta^j \\ &= \zeta \sum_j K_{j+4}(z) \zeta^{j+4} \\ &= \zeta f(z) \end{aligned}$$

Also ist $U^* = f^*(\mathbb{C}) = \zeta f(\mathbb{C}) = \zeta U$!

Wir fassen das Ergebnis wieder in einem Diagramm zusammen:

$$\begin{array}{ccccc}
G & \xrightarrow{z \mapsto z\zeta} & G\zeta & \equiv & G^* \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) & \longrightarrow & (\gamma_4, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) & \equiv & (\gamma_0^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^*, \gamma_4^*) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
U & \xrightarrow{z \mapsto z\zeta} & U\zeta & \equiv & U^*
\end{array} \tag{23}$$

5.7 Nachweis der Regularität eines Pentagrid

Wie sieht man einem Wertesatz $(\gamma_0, \dots, \gamma_4)$ mit $\sum_j \gamma_j = 0$ an, ob er ein reguläres Pentagrid bestimmt? In Theorem 11.1 auf Seite 55 gibt de Bruijn ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, dass ein Pentagrid singular ist. Wir benötigen nur eine notwendige Bedingung, und die wollen wir auch möglichst vollständig beweisen.

Lemma 10 *Die Menge*

$$P := \left\{ \sum_{j=0}^n r_j \zeta^j \mid n \in \mathbb{N}, r_j \in \mathbb{Z} \text{ für } j = 0, \dots, n \text{ und } \sum_j r_j = 0 \right\}$$

ist wohldefiniert, und sie hat folgende Eigenschaften:

1. Für $\alpha, \beta \in P$ ist auch $\alpha \pm \beta \in P$.
2. Für $\alpha \in P$ ist $\alpha\beta \in P$ für alle $\beta \in \mathbb{Z}[\zeta]$.

Aufgrund dieser Eigenschaften heißt P übrigens ein Ideal des Rings $\mathbb{Z}[\zeta]$.

Beweis Du wunderst dich vielleicht über den merkwürdigen Ausdruck „wohldefiniert“. Das Problem ist, dass jedes Element $\alpha \in \mathbb{Z}[\zeta]$ verschiedene Darstellungen $\alpha = \sum_j r_j \zeta^j = \sum_j s_j \zeta^j \in \mathbb{Z}[\zeta]$ hat, bei denen durchaus nicht $r_j = s_j$ ist für alle auftretenden j ; es ist ja zum Beispiel $\zeta^5 = 1$. Da könnte ja $\sum_j r_j = 0$ und $\sum_j s_j \neq 0$ sein, und dann gehörte α zu P und nicht zu P . Vor so etwas muss man sich sehr hüten.

Unsere Menge P ist aber widerspruchsfrei definiert. In $\sum_j r_j \zeta^j \in \mathbb{Z}[\zeta]$ ersetzen wir, beim größten Exponenten beginnend, so lange ζ^{k+5} durch ζ^k , bis wir bei einem Polynom vom Grad ≤ 4 angekommen sind. Dies ist dann eindeutig bestimmt (siehe zweite Aussage von Lemma 12), und die Summe der Koeffizienten hat sich bei dem Prozess nicht verändert.

Die erste Eigenschaft von P ist leicht einzusehen. Die zweite folgt dann aus der ersten, wenn man sich klarmacht, dass für $\alpha \in P$ auch $\zeta\alpha \in P$ und für $r \in \mathbb{Z}$ auch $r\alpha \in P$ ist. \square

Nun wollen wir unser notwendiges Kriterium formulieren.

Lemma 11 *Wenn das durch den Wertesatz $(\gamma_0, \dots, \gamma_4) \in \mathbb{R}^5$ bestimmte Pentagrid singular ist, dann gibt es eine natürliche Zahl k , eine reelle Zahl u und ein $\alpha \in P$ so dass für den Parameter ξ des Rhombenparketts gilt:*

$$\xi \zeta^k = u i + \alpha \quad .$$

Beweis Bei einem singulären Pentagrid schneiden sich (mindestens) drei Gittergeraden in einem Punkt. Da eine Verschiebung des Pentagrid nach Gleichung 21 auf Seite 14 keine Auswirkung auf ξ und das Rhombenparkett hat, können wir annehmen, dass der Punkt der Nullpunkt ist. Dann sind (mindestens) drei γ_j ganzzahlig, und wir können sie getrost als 0 annehmen, denn wir können gegebenenfalls den Wertesatz (γ_j) um ein Fünftupel aus \mathbb{Z}^5 mit Summe 0 verändern. Das Pentagrid bleibt dabei gleich, ξ ändert sich um ein Element aus P (siehe wiederum Gleichung 21 auf Seite 14).

Die beiden verbleibenden γ_j müssen Gegenzahlen von einander sein, also ist ξ von der Gestalt

$$\xi = \gamma\zeta^l - \gamma\zeta^m + \alpha \quad \text{für geeignete } l, m \in \mathbb{N} \text{ und } \alpha \in P.$$

Indem man die Gleichung mit einer geeigneten Potenz ζ^k multipliziert, erreicht man, dass die Einheitswurzeln ζ^{k+l} und ζ^{k+m} in der komplexen Zahlenebene symmetrisch zur reellen Achse liegen. Dann ist $\zeta^{k+l} - \zeta^{k+m}$ rein imaginär, und wir haben

$$\xi\zeta^k = \gamma(\zeta^{k+l} - \zeta^{k+m}) + \beta = iu + \beta$$

mit $u = 2\gamma\Im(\zeta^{k+l}) \in \mathbb{R}$ und $\beta \in P$. □

Wenn man das Kriterium in Lemma 11 anschaut, mag man in Zweifel geraten, ob es überhaupt reguläre Pentagrids gibt. Das Ideal P liegt dicht in \mathbb{C} , diese Punktmenge kann man längs fünf Geraden durch die komplexe Zahlenebene schieben. Geometrisch nachzudenken, wie man die fünf Geradenscharen eines Pentagrid legen sollte, damit sich garantiert niemals drei Geraden in einem Punkt schneiden, ist wohl ein hoffnungsloses Unterfangen.

Wir werden nun mit algebraischen Mitteln den Nachweis führen, dass ein konkreter Wertesatz ein reguläres Pentagrid bestimmt. Zunächst stellen wir einige Hilfsmittel bereit.

Lemma 12 *Es gelten die folgenden Aussagen.*

1. Wenn z in P liegt, dann auch die konjugiert komplexe Zahl \bar{z} .
2. Aus $\sum_{j=0}^4 r_j \zeta^j = \sum_{j=0}^4 s_j \zeta^j \in \mathbb{Z}[\zeta]$ folgt $r_j = s_j$ für $j = 0, \dots, 4$.
3. Für $z = \sum_{j=0}^4 r_j \zeta^j \in \mathbb{Z}[\zeta]$ gilt

$$z + \bar{z} = 2r_0 + (r_1 + r_4)\zeta + (r_2 + r_3)\zeta^2 + (r_2 + r_3)\zeta^3 + (r_1 + r_4)\zeta^4 \quad .$$

Beweis Die erste Eigenschaft rechnet man einfach nach. Die dritte ergibt sich daraus, dass $\bar{\zeta} = \zeta^4$ und $\bar{\zeta}^2 = \zeta^3$ ist. Um die zweite Eigenschaft zu begründen, muss ich darauf verweisen, dass $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ das Minimalpolynom von ζ in $\mathbb{Q}[x]$ ist; es gibt also kein Polynom $\neq 0$ in $\mathbb{Q}[x]$ mit Nullstelle ζ , das einen kleineren Grad hat als vier. □

Lemma 13 *Der Wertesatz $(\gamma_0, \dots, \gamma_4) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0, -\frac{5}{6})$ bestimmt ein reguläres Pentagrid.*

Beweis Wenn das durch den Wertesatz bestimmte Pentagrid singulär ist, muss nach Lemma 11

$$\xi\zeta^k = iu + \alpha$$

sein für ein $u \in \mathbb{R}$ und ein $\alpha \in P$. Daraus folgt mit Lemma 12, dass

$$\xi\zeta^k + \overline{\xi\zeta^k} \in P \tag{24}$$

sein muss. Diese Bedingung ist im konkreten Fall leicht nachzuprüfen. Wir berechnen zunächst $\xi = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\zeta^2 - \frac{5}{6}\zeta^3$, dann leicht mit Hilfe der dritten Aussage von Lemma 12

$$\xi + \bar{\xi} = 1 - \frac{1}{2}\zeta^2 - \frac{1}{2}\zeta^3 \quad .$$

Dies liegt nicht in P , denn nicht alle Koeffizienten sind ganzzahlig, und die Darstellung ist nach Lemma 12 eindeutig.

Damit ist der Fall $k = 0$ erledigt. Man kann nun die Fälle $k = 1, \dots, 4$ auf die gleiche Art explizit durchrechnen. Ich will hier statt dessen folgendes Argument anführen: Von den fünf Koeffizienten $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{6}, 0, 0$ von $\xi\zeta^k$ wird, wenn man zu $\xi\zeta^k + \overline{\xi\zeta^k}$ übergeht, einer verdoppelt. Von den anderen vier werden je zwei addiert. Niemals werden sich dabei drei ganze Zahlen ergeben. Also erhält man kein Element von P , die in Gleichung 24 formulierte notwendige Bedingung ist nicht erfüllt, das Pentagrid kann im Widerspruch zur Annahme nicht singulär sein. □

5.8 Endliche Teile eines Rhombenparketts kommen in jedem anderen Rhombenparkett vor

Jeder endliche Teil eines Rhombenparketts kommt dort unendlich oft wieder vor – sogar in jedem anderen Parkett. Man beschreibt dieses Phänomen so: Wenn man mit dem Fallschirm abspringt und auf dem Rhombenparkett landet, kann man aus der Kenntnis der Umgebung des Landeplatzes nicht schließen, in welcher Gegend des Rhombenparketts man sich befindet.⁸

Wir benutzen hier das, was in Kapitel 4 entwickelt wurde. Ein Rhombenparkett ist bestimmt durch den Parameter ξ . Er legt eine gewisse Ebene im \mathbb{R}^5 fest. Jede Einheitszelle im \mathbb{R}^5 , die von der Ebene in einem inneren Punkt geschnitten wird, bestimmt ein Fünftupel $(r_0, \dots, r_4) \in \mathbb{Z}^5$, und dies bestimmt den Knoten $\sum_j r_j \zeta^j$ des Rhombenparketts.

Nehmen wir noch ein zweites Rhombenparkett mit Parameter ξ^* hinzu. Da P dicht liegt in \mathbb{C} , können wir $\xi^* - \xi$ beliebig genau durch $\alpha \in P$ annähern. Anders gesagt, es gibt $\alpha \neq 0$ in P , so dass sich $\xi + \alpha$ beliebig wenig von ξ^* unterscheidet. Das heißt aber, dass die Rhombenparkette zu ξ^* und zu $\xi + \alpha$ in beliebig großen aber beschränkten Gebieten übereinstimmen. Dies sieht man am besten ein, wenn man sich daran erinnert, dass man die Knoten des Rhombenparketts durch Projektion der ausgezeichneten Ecken der geschnittenen Einheitszellen des \mathbb{R}^5 in eine feste Ebene durch den Nullpunkt erhält.

Dieses α ist von der Form $\sum_j r_j \zeta^j$ mit $r_j \in \mathbb{Z}$ für $r = 0, \dots, 4$ und $\sum r_j = 0$. Wie in Gleichung 21 auf Seite 14 beschrieben, unterscheiden sich die Rhombenparkette zu ξ und zu $\xi + \alpha$ für $\alpha \in P$ nur um eine Verschiebung. Damit ist die Behauptung in der Überschrift begründet.

Diese Überlegung geht auch für $\xi = \xi^*$. Also wiederholt sich jeder aus endlich vielen Rhomben bestehende Teil eines Rhombenparketts immer wieder.

5.9 Deflation und goldener Schnitt

Auch für Rhomben gibt es Deflation: Man zerschneidet jeden Rhombus eines Parketts in vorgeschriebener Weise⁹. Ein Rhombus *thick* liefert zwei neue Rhomben *thick* und einen Rhombus *thin*. Ein Rhombus *thin* liefert einen Rhombus *thick* und einen Rhombus *thin*. Man kann nun die neue Figur so strecken, dass die Rhomben wieder die alte Kantenlänge haben.

Wenn man a Rhomben *thick* und b Rhomben *thin* zusammengelegt hat und Deflation durchführt, hat man anschließend $a + b$ Rhomben *thin* und $2a + b$ Rhomben *thick*. Schauen wir genau hin:

$$b, a, a + b, 2a + b$$

Richtig, da steht ein Stück aus einer Fibonacci-Folge, und das Bildungsgesetz stellt sicher, dass die betrachteten Anzahlen eine Fibonacci-Folge durchlaufen. Von Fibonacci-Folgen (a_n) wissen wir, dass im allgemeinen

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

gilt: der Quotient auf einander folgender Glieder (und damit das Verhältnis der Anzahlen der Rhomben *thick* und *thin*) strebt gegen die große goldene Zahl!

Wenn man es genau wissen will, kann man die Rekursion mit Hilfe von Matrizen schreiben:

$$\begin{pmatrix} a \\ a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix},$$

Eigenwerte und Eigenvektoren suchen ... das soll hier nicht ausgeführt werden. Hier sollte nur deutlich werden, dass beim Verhältnis der Anzahlen von *thick* und *thin* nicht von ungefähr die goldene Zahl auftritt.

⁸Für Parkette mit Translationen gilt das ohnehin.

⁹Siehe bei de Bruijn S.61

6 Ausblick

Ein Teil von de Bruijns Arbeit ist nun halbwegs erschlossen, aber es sind längst nicht alle Schätze gehoben. Wesentliches fehlt:

1. Was ist mit Parketten zu singulären Pentagrids?
2. Gibt es zu jedem Penrose-Parkett ein Pentagrid? Antwort: ja!
3. Die Frage liegt nahe, passt aber schlecht zu de Bruijns Zugang: wenn ich eine Überdeckung der ganzen Ebene aufbaue, indem ich mit einem endlichen Teil beginne und den immer durch Deflation vergrößere, kann ich dann diesen Prozess dem sukzessiven Anlegen vergleichen? Ist ein endlicher Abschnitt eindeutig fortsetzbar?¹⁰ Ist die Ausgangspartie als Teil im Ergebnis der Deflation enthalten? (Das Pentagrid liefert immer gleich eine Überdeckung der ganzen Ebene, da stellt sich das Problem nicht.)

7 Anhang 1

7.1 Konvexe Mengen

7.2 $\mathbb{Z}[\zeta]$ ist dicht in \mathbb{C}

Lemma 14 Die Menge $\mathbb{Z}[\zeta]$ ist dicht in \mathbb{C} , das heißt in jeder noch so kleinen Umgebung jedes beliebigen $z \in \mathbb{C}$ liegt ein Element der Menge.

Beweis Es ist

$$\zeta + \zeta^{-1} = 2 \cos(2\pi/5) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} ,$$

und das ist irrational. Wenn man nun $r(\zeta + \zeta^{-1})$ bildet für alle $r \in \mathbb{Z}$ und den ganzzahligen Anteil wegsabtrahiert, bekommt man unendlich viele paarweise verschiedene Zahlen der Form

$$r_0 \cdot 1 + r_1 \zeta + r_1 \zeta^4 \in \mathbb{Z}[\zeta] ,$$

die alle in $[0; 1]$ liegen. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es also zwei dieser Zahlen, deren Unterschied kleiner als ϵ ist. Der Unterschied zweier solcher Zahlen ist wieder von der gleichen Form. Bilden wir alle \mathbb{Z} -Vielfachen des Unterschieds, liegt keine reelle Zahl weiter als $\epsilon/2$ von einem dieser Vielfachen entfernt, $\mathbb{Z}[\zeta]$ liegt also schon einmal dicht in \mathbb{R} .

Wiederholen wir diese Überlegung mit $\zeta^2 + 1 = \zeta(\zeta + \zeta^{-1})$, sehen wir, dass $\mathbb{Z}[\zeta]$ auch dicht auf der Geraden $\mathbb{R}\zeta$ ist. Jede komplexe Zahl lässt sich aber als Summe einer reellen Zahl und eines \mathbb{R} -Vielfachen von ζ schreiben, deshalb ist $\mathbb{Z}[\zeta]$ dicht in \mathbb{C} , wie behauptet. \square

Lemma 14 lässt sich leicht verschärfen. Im Beweis anstelle von $\zeta + \zeta^{-1}$ mit der reellen Zahl $\zeta - \zeta^2 - \zeta^3 + \zeta^4 \in P$ arbeiten, denn es ist

$$\zeta - \zeta^2 - \zeta^3 + \zeta^4 = 1 + 2\zeta + 2\zeta^4 = 1 + 2 \cdot 2 \cos(2\pi/5) = \sqrt{5} .$$

Es gilt also das folgende Lemma

Lemma 15 Das Ideal P von $\mathbb{Z}[\zeta]$ aus Lemma 10 auf Seite 16 ist dicht in \mathbb{C} .

¹⁰Eigentlich kann das nicht sein. Wenn der endliche Teil überhaupt zu einem Parkett fortsetzbar ist, ist er endlicher Teil eines Rhombenparketts, kommt also in jedem anderen Rhombenparkett ebenfalls vor.

8 Anhang 2: Arbeitsblätter

8.1 Arbeitsblatt: Rhombenpuzzle

Es ist hilfreich, wenn man sich mit den Rhomben praktisch vertraut machen kann. In Abbildung 7 auf Seite 21 findest du eine Vorlage, aus der du dir welche ausschneiden kannst.

1. Lege Rhomben zu einem Muster zusammen. Achte darauf, dass die Kreisbögen benachbarter Rhomben immer im gleichen Kantenpunkt enden, also aneinander anschließen.
2. Wie kann die Umgebung eines Knotens im Rhombenparkett aussehen? Erstelle eine vollständige Sammlung aller Möglichkeiten.
3. Schaue dir das Rhombenparkett in Abbildung 8 auf Seite 22 an. Kommen alle Typen deiner Sammlung dort vor?
4. Findest du in Abbildung 8 Knotentypen, die nicht in deiner Sammlung sind?
5. Treten die Rhomben „*thick*“ und „*thin*“ etwa gleich oft auf? Umgrenze in Abbildung 8 ein überschaubares Gebiet, zerschneide dabei keine Rhomben. Zähle aus, wie viele Exemplare beider Rhombentypen in dem Gebiet sind, und bilde das Verhältnis der Anzahlen.

Ein Problem beim Puzzeln ist, ob man sicherstellen kann, dass man immer weiter anlegen und so im Prinzip die ganze Ebene überdecken kann. Das ist alles andere als leicht zu beantworten. Ein wesentliches Ergebnis von de Bruijns Theorie ist, dass sie eine solche Garantie gibt und darüber hinaus weitere Ergebnisse liefert. Die Ebene kann tatsächlich mit Rhomben ausgelegt werden, und das Muster ist nicht-periodisch.

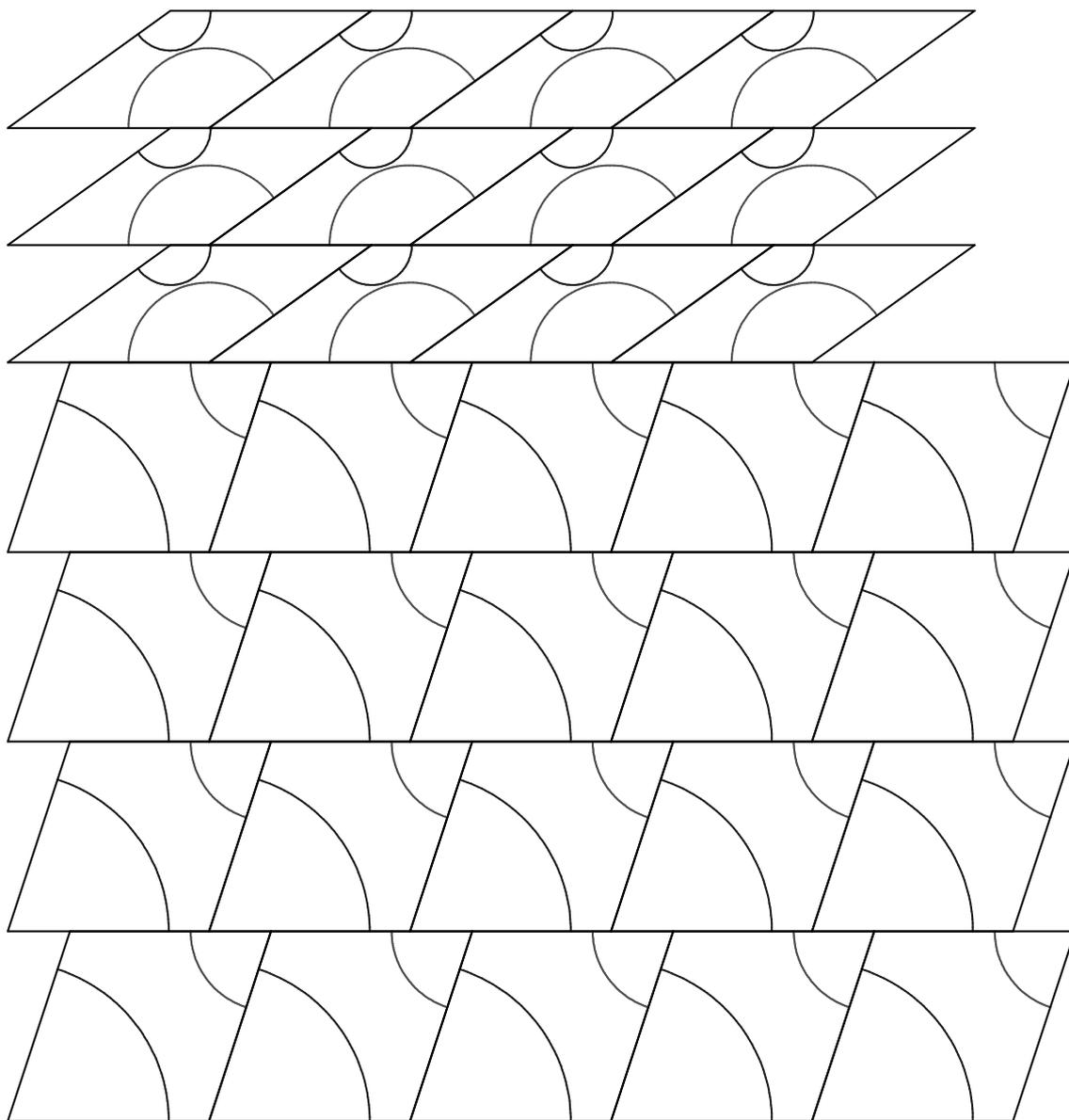


Abbildung 7: Einige Rhomben *thick* und *thin*

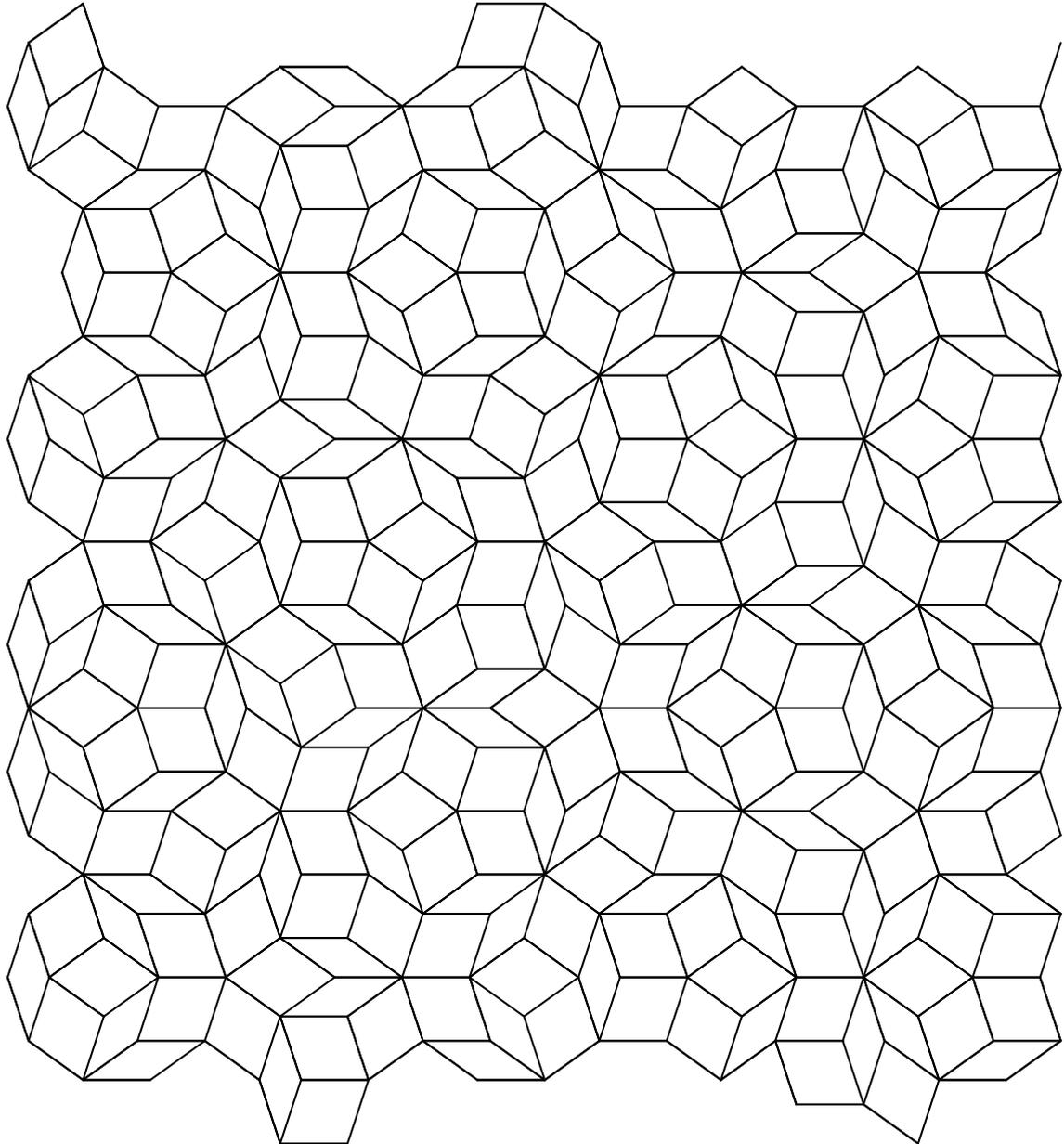


Abbildung 8: Ausschnitt aus einem Rhombenparkett

8.2 Arbeitsblatt: Vom Pentagrid zum Rhombenparkett (topologisch)

In Abbildung 9 siehst du einen Ausschnitt aus einem Pentagrid. Man spricht in der Graphentheorie von einem Netz, seinen Knoten, seinen Kanten und seinen Maschen – von diesen Begriffen wirst du ohne exakte Definitionen schon eine richtige Vorstellung haben. Zwei Maschen heißen benachbart, wenn sie eine Kante gemeinsam haben.

Mit dem Bild sollst du nun folgendes anstellen: Wähle in jeder Masche einen (inneren) Punkt und markiere ihn. Verbinde jeweils die Punkte, die in benachbarten Maschen liegen – ruhig ohne Lineal, hier geht es um Topologie.

Du hast nun ein neues Netz gezeichnet, es heißt dual zum alten: jede Masche des alten Netzes gehört zu einem Knoten des neuen Netzes, jede Kante des alten Netzes zu einer Kante des neuen Netzes. Schau dir das neue Netz genau an. Was erkennst du?

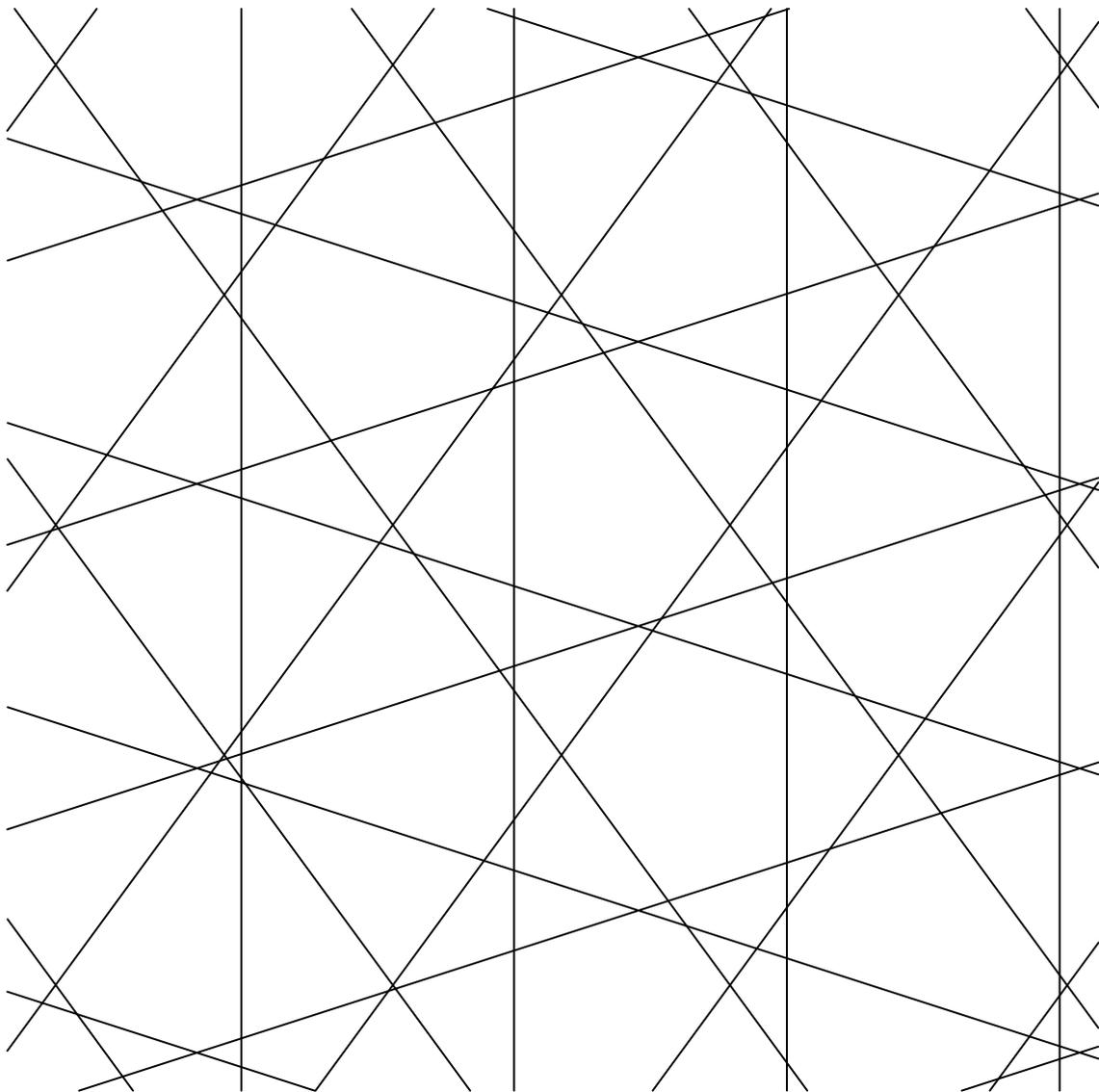


Abbildung 9: Ausschnitt aus einem Pentagrid

8.3 Arbeitsblatt: Vom Pentagrid zum Rhombenparkett (geometrisch)

Hier sollst du einmal praktisch ausprobieren, wie de Bruijns Konstruktion arbeitet. Der Bauplan steht auf dieser Seite, du zeichnest das Rhombenparkett auf Seite 25. In Abbildung 10 siehst du einen Ausschnitt aus einem Pentagrid und ein Fünfeck, auf dessen Seiten Pfeile stehen. Jede Gerade des Pentagrids ist parallel zu einer Kante des Fünfecks.

Zu jeder Masche des Netzes gehört ein Knoten des Rhombenparketts. Beginne mit einer Masche und ordne ihr – eigentlich ihren Punkten – den ersten Knoten zu. Du kannst ihn irgendwo auf Seite 24 markieren, aber möglichst zentral. Damit ist der Anfang gemacht. Wähle nun eine benachbarte Masche, sie muss mit der ersten eine Kante gemeinsam haben. Wenn du von der ersten in die zweite Masche gehst, musst du eine Gittergerade überqueren. Stelle mit Hilfe des Fünfecks fest, zu welcher Sorte die Gerade gehört und ob du sie in Pfeilrichtung oder gegen die Pfeilrichtung überquerst. Die Gerade muss ja zu einer Kante des Fünfecks parallel sein, und auf jeder Fünfeckskante steht ein kleiner Pfeil, der die Richtung zeigt. Nehmen wir als Beispiel an, die Gerade sei zur Kante 2 parallel und du hättest sie in Pfeilrichtung überquert. Dann gehst du von dem Knoten, den du als ersten gezeichnet hast, in der Richtung, die der Pfeil mit der Nummer 2 in Abbildung 11 zeigt, um eine Pfeillänge weiter. Da liegt der Knoten, der zur zweiten Masche gehört. Zeichne ihn ein und verbinde ihn mit dem ersten. Hättest du die Gerade gegen die Pfeilrichtung überquert, hättest du vom Startknoten um eine Pfeillänge entgegen der Pfeilrichtung gehen müssen.

Wenn du so von Masche zu Masche fortfährst, entsteht dein Rhombenparkett Punkt für Punkt und Kante für Kante.

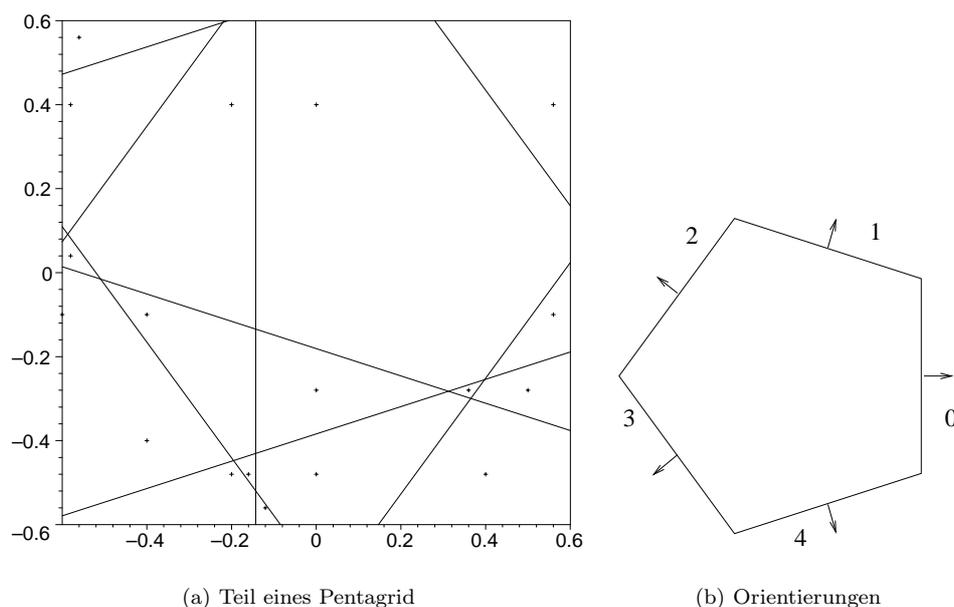


Abbildung 10: Gitterlinien und ihre Orientierung

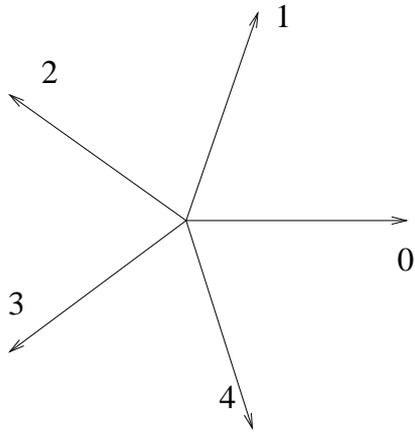


Abbildung 11: Kantenrichtungen

Platz für deine Zeichnung:

8.4 Arbeitsblatt zur Veranschaulichung der Erzeugung des Rhombenparketts mit Hilfe einer Ebene im \mathbb{R}^5

In 4.1 ist beschrieben, wie man das Rhombenparkett zu einem Wertesatz $(\gamma_0, \dots, \gamma_4)$ mit Hilfe einer Ebene im \mathbb{R}^5 gewinnen kann, die durch den Parameter ξ bestimmt ist. In jeder Einheitszelle im \mathbb{R}^5 , die von der Ebene in einem inneren Punkt geschnitten wird, sucht man einen bestimmten Eckpunkt auf und projiziert den in die Ebene. Die Menge der Bildpunkte ist (bis auf eine Streckung) genau die Menge der Knoten des Rhombenparketts.

Dies ist nun leichter gesagt als getan, ein fünfdimensionaler Raum ist eine schwer zugängliche Gegend. Ich will dir aber an Objekten kleinerer Dimension zeigen, wie die Sache läuft. Anstelle des fünfdimensionalen Raums nehmen wir eine Ebene, und anstelle der Ebene nehmen wir eine Gerade.

Eine Einheitszelle in einer Ebene ist einfach ein Einheitsquadrat. Nimm also ein Blatt kariertes Papier, dann hast du eine Ebene mit Einheitszellen. Die waagerechten Kästchenlinien verlaufen in x -Richtung, nach rechts werden die x -Werte größer, die senkrechten Kästchenlinien verlaufen in y -Richtung, nach oben werden die y -Werte größer. Im Originalraum brauchtest du jetzt eben noch drei Richtungen, aber die wollten wir ja weglassen.

Nun zeichne eine Gerade durch den Nullpunkt ein. Sie darf weder waagerecht noch senkrecht verlaufen, und sie darf durch keinen Gitterpunkt außer dem Nullpunkt gehen. Jetzt gibt es einen Streifen von Einheitszellen (=Kästchen), von denen die Gerade innere Punkte enthält. Nimm mal ein solches Kästchen. Es hat einen ausgezeichneten Eckpunkt, und zwar ist das der Punkt mit größtmöglichem x -Wert und größtmöglichem y -Wert, also der Eckpunkt rechts oben. Den projizierst du senkrecht auf deine Gerade, das heißt, du fällst das Lot von dem Punkt auf die Gerade. Der Fußpunkt des Lots ist ein Knoten des Rhombenparketts. Unser „Rhombenparkett“ ist nun einfach eine Punktreihe, etwas anderes passt nicht auf die Gerade.

Im fünfdimensionalen Raum müsstest du nicht nur die x - und die y -Koordinate möglichst groß machen, sondern noch drei weitere Koordinaten, dann hättest du den ausgezeichneten Eckpunkt. Das ist leichter, als du denkst. Wenn der innere Punkt meinetwegen

$$(2\frac{1}{2}|123\frac{17}{57}| - 8\frac{2}{3}| - \frac{7}{8}|23\frac{4}{7})$$

wäre – ganzzahlige Koordinaten können nicht auftreten! – wäre der ausgezeichnete Eckpunkt

$$(3|124| - 8|0|24) .$$

Und das Lot? Man kann rechnerisch den Ebenenpunkt finden, der dem gegebenen Eckpunkt am nächsten liegt, und der ist es! Entfernungen im \mathbb{R}^5 sind durch eine Pythagorasformel gegeben. Sie sieht so aus wie die für die Ebene und die für den Raum, die du schon kennst, sie hat eben nur noch zwei Summanden mehr. Die Entfernung der Punkte mit den Koordinaten (x_0, x_1, \dots, x_4) und (y_0, y_1, \dots, y_4) ist gegeben durch

$$\sqrt{(x_0 - y_0)^2 + (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_4 - y_4)^2} ,$$

wenn man das einmal eingesehen hat, kann man es ohne Weiteres auf Räume beliebig hoher Dimension verallgemeinern.

8.5 Arbeitsblatt: Von einer Ebene im \mathbb{R}^3 erzeugtes Parkett

Auf dem Arbeitsblatt auf Seite 26 wurde mit Hilfe einer Geraden ein eindimensionales Parkett erzeugt. Wir erzeugen nun auf ähnliche Weise mit Hilfe einer Ebene im Raum ein ebenes Parkett.

Wir beginnen mit dem gewöhnlichen dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 . Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems ist jedem Raumpunkt P ein Koordinatentripel (x, y, z) zugeordnet. Die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten bilden ein räumliches Gitter, und es bewirkt die Einteilung des Raums in Würfel der Kantenlänge 1. Durch die Abbildung

$$(x, y, z) \mapsto (\lceil x \rceil, \lceil y \rceil, \lceil z \rceil) \quad (25)$$

wird wieder allen (inneren) Punkten eines dieser Würfel der Eckpunkt des Würfels zugeordnet, der am weitesten rechts/vorn/oben liegt.

Wir nehmen nun eine Ebene durch den Nullpunkt, die durch keinen weiteren Gitterpunkt geht, und betrachten alle Würfel, die mit der Ebene einen inneren Punkt gemeinsam haben. Durch die Abbildung in Gleichung 25 ist dem inneren Punkt ein Gitterpunkt zugeordnet, nämlich der Eckpunkt des Würfels mit der größten x -, y - und z -Koordinate. Wir projizieren diese Eckpunkte orthogonal in die Ebene mit der Gleichung $x + y + z = 0$, um ein gleichmäßiges Muster zu bekommen. Die Bildpunkte sind die Knoten unseres Parketts!

Bisher lief alles in etwa so wie im eindimensionalen Fall in dem Arbeitsblatt auf Seite 26. Aber nun müssen wir festlegen, welche Knoten durch Kanten verbunden werden sollen: Wir verbinden zwei Knoten, wenn die Würfel, von denen die Knoten stammen, eine Fläche gemeinsam haben.

Setze dich mit dieser Konstruktion auseinander! Die folgenden Arbeitsaufträge mögen dabei eine Hilfe sein.

1. Finde eine Ebene durch den Nullpunkt, die keinen weiteren Gitterpunkt enthält!
2. Betrachte die Würfel, für deren Punkte (x, y, z) gilt $2 < x < 5$ und $2 < y < 5$. Welche dieser Würfel werden von der Ebene geschnitten? Welche Bildpunkte unter der Abbildung in Gleichung 25 entstehen? Auf welche Punkte werden sie projiziert? Welche Kanten sind ein zu zeichnen?
3. Gehe von einem Würfel aus, der mit der Ebene einen inneren Punkt gemeinsam hat. Der Würfel hat sechs Nachbarwürfel, von denen einige ebenfalls mit der Ebene einen inneren Punkt gemeinsam haben, einige aber nicht. Welche Fälle können auftreten? Wie sehen die zugehörigen Muster aus, die von dem Knoten und den Kanten, die in dem Knoten enden, gebildet werden?
4. Schaue dir das Beispiel in Abbildung 12 auf Seite 27 an. Macht es den Eindruck, als sei es nicht-periodisch?

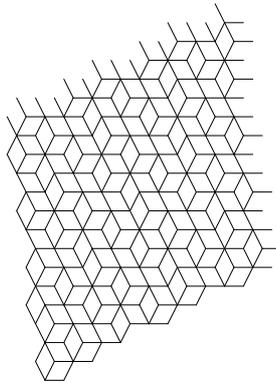


Abbildung 12: Von einer Ebene im Raum erzeugtes Parkett

9 Anhang 3: Ausführliche Besprechung des eindimensionalen Falls

Das eindimensionale Parkett, das du auf dem Arbeitsblatt auf Seite 26 kennen lernst, soll hier ausführlich besprochen werden. Zwar ist es längst nicht so attraktiv wie das richtige Rhombenparkett; die merkwürdigen Eigenschaften, dass es nicht-periodisch ist und dass endliche Teile unendlich oft wieder vorkommen, können wir dafür mit Schulmitteln vollständig in den Griff bekommen.

9.1 Konstruktion des eindimensionalen Parketts

Wir begeben uns in die gewöhnliche Ebene mit einem rechtwinkligen Koordinatensystem, bestehend aus x - und y -Achse, und einer Ursprungsgeraden g mit der Steigung m . Auf dieser Geraden soll das Parkett entstehen. Wir versehen die Gerade mit einer Skala, so wird sie zu einer u -Achse. Der Nullpunkt habe den u -Wert 0 (siehe Abbildung 13).

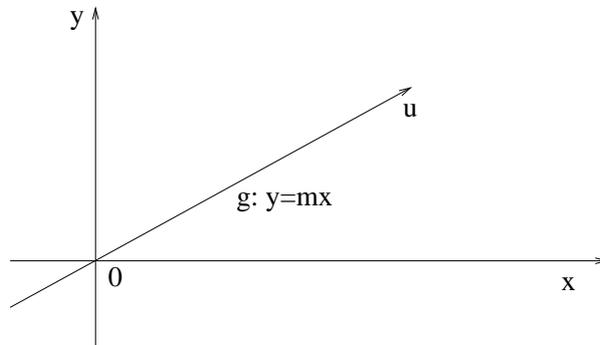


Abbildung 13: Ebene mit xy -System und der Ursprungsgeraden g als u -Achse

Jedem Punkt $(x|y)$ der Ebene weisen wir den Gitterpunkt $(\lceil x \rceil | \lceil y \rceil)$ zu, und jeden Gitterpunkt $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$ projizieren wir orthogonal auf die Gerade g . Wenn g die x -Achse unter dem Winkel α schneidet, ist diese Projektion gegeben durch

$$\pi : (r|s) \mapsto r \cos(\alpha) + s \sin(\alpha) \quad \text{für } r, s \in \mathbb{Z} . \quad (26)$$

Die Menge der Bildpunkte von π ist nun eine Menge von u -Werten! Von diesen sollen die zum Parkett gehören, die Bilder von Paaren $(r|s) \in \mathbb{Z}^2$ sind, deren Quadrat mit den Eckpunkten $(r|s), (r-1|s), (r-1|s-1), (r|s-1)$ von g in einem inneren Punkt geschnitten wird (siehe Abbildung 14). Dies ist analog zu de Bruijns Konstruktion, die in 4.1 auf Seite 9 beschrieben ist.

Wir bezeichnen die Menge der Parkettpunkte mit U . Mit

$$f(x) := (\lceil x \rceil | \lceil mx \rceil)^\pi = \lceil x \rceil \cos(\alpha) + \lceil mx \rceil \sin(\alpha) \quad (27)$$

ist $U = f(\mathbb{R})$. Abbildung 14 soll die Konstruktion klar machen.

9.2 Verschiebungen des Parketts

Lemma 16 *Das Parkett U sei konstruiert wie in Abschnitt 9.1 beschrieben.*

1. *Wenn die Steigung m von g rational ist, ist das Parkett periodisch.*
2. *Wenn die Steigung m von g irrational ist, ist das Parkett nicht-periodisch.*
3. *Wenn die Steigung m von g irrational ist, kommt jede endliche Teilmenge des Parketts unendlich oft im Parkett vor.*

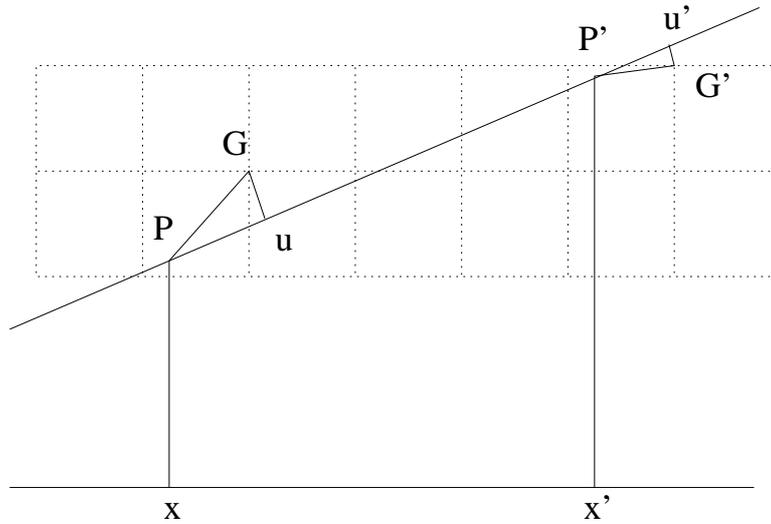


Abbildung 14: Zum x -Wert x gehört der Punkt $P = (x|mx)$ auf g , dieser ist innerer Punkt des Einheitsquadrats aus Gitterpunkten mit ausgezeichnetem Eckpunkt $G = (\lceil x \rceil | \lceil mx \rceil)$, und dieser wird unter π auf u abgebildet. Die punktierten Linien sind Gitterlinien.

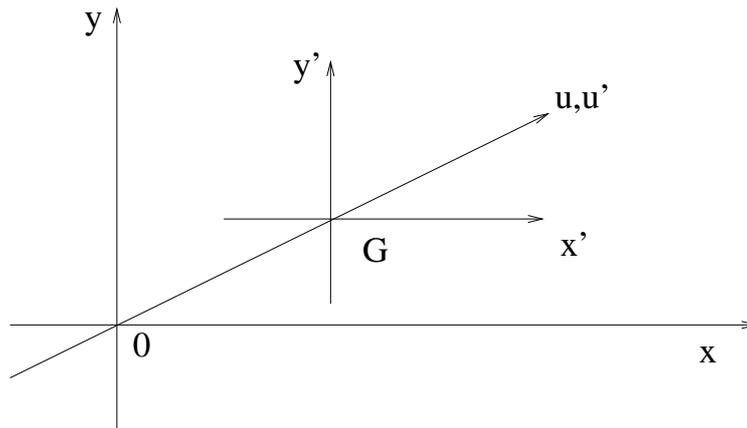


Abbildung 15: Für rationales m geht die Gerade durch einen weiteren Gitterpunkt G .

Beweis von Lemma 16 Wenn m rational ist, geht die Gerade g außer durch $(0|0)$ noch durch einen weiteren Gitterpunkt $G(r|s)$.

Die Verschiebung τ , die den Nullpunkt in G abbildet, überführt das Gitter in sich und g in sich, also auch das Parkett U in sich (siehe Abbildung 15). In diesem Fall ist U also periodisch. Damit ist die erste Aussage bewiesen.

Im folgenden sei nun m irrational.

Es sei $v \in U$. Dann gibt es ganze Zahlen r, s , so dass $v = r \cos(\alpha) + s \sin(\alpha)$ ist. Dann ist v das Bild von $G(r|s)$ unter der Projektion π .

Es sei τ die Verschiebung, die den Nullpunkt in den Gitterpunkt $G(r|s)$ bringt. Die Gerade g wird von τ auf eine parallele Gerade g' abgebildet. Dabei geht das Parkett U auf g in das Parkett $U' = U^\tau$ auf g' über. Wir haben nun die Situation, die in Abbildung 16 dargestellt ist.

Das Parkett U enthalte zwischen $u = 0$ und $u = v$ einschließlich die Werte $0 = u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n = v$. Das Parkett $U' := U^\tau$ auf der u' -Achse mit Nullpunkt G enthält dann die gleichen Werte zwischen $u' = 0$ und $u' = v$. Wenn die Verschiebung $u \mapsto u + v$ von g in sich das Parkett U in sich überführt, muss U ab v mit den Werten $u_n = v < v + u_1 < v + u_2 < \dots <$

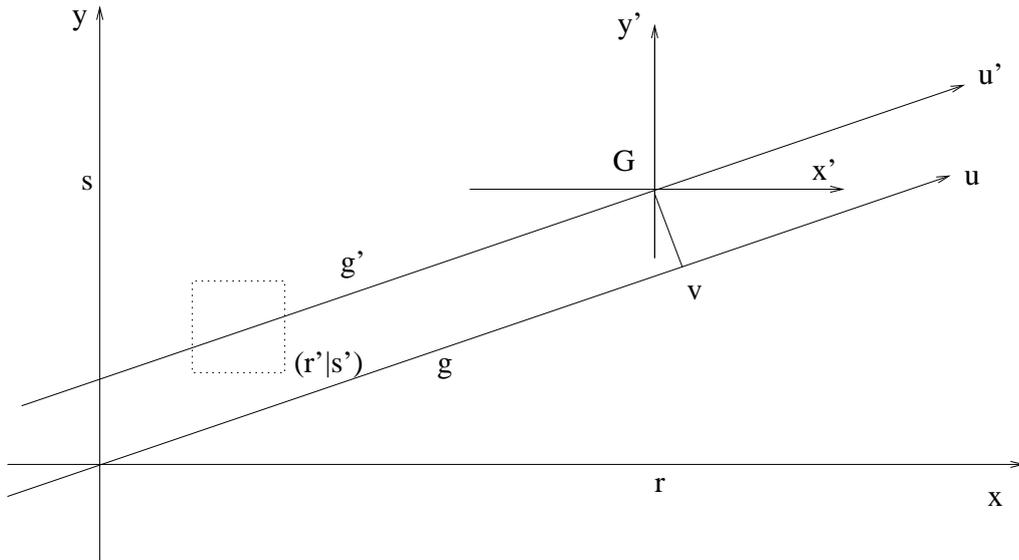


Abbildung 16: Zum Beweis, dass das Parkett für irrationales m nicht-periodisch ist.

$v + u_n = 2v$ weitergehen. Es sind also jeweils die gleichen zu g orthogonalen Geraden, die die π -Bilder G auf der u' -Achse und v auf der u -Achse erzeugen, u_1 auf der u' -Achse und $v + u_1$ auf der u -Achse, und so weiter. Jede zu g orthogonale Gerade hat die irrationale Steigung $-1/m$, sie enthält also höchstens einen Gitterpunkt. Wie wir in Lemma 17 zeigen werden, gibt es aber immer Gitterpunkte zwischen den Geraden g und g' , sei ihr Abstand auch noch so klein. Es sei $(r'|s')$ ein solcher Gitterpunkt. Dann schneidet die obere Gerade, oBdA g' , das Quadrat mit den Eckpunkten $(r'|s')$, $(r'|s' + 1)$, $(r' - 1|s' + 1)$, $(r' - 1|s')$ in einem inneren Punkt, die untere Gerade aber nicht. Folglich liefert $(r'|s' + 1)$ einen Parkettpunkt auf der oberen, nicht jedoch auf der unteren Geraden (siehe Abbildung 16). Das Parkett U kann nicht unter $u \mapsto u + v$ in sich übergehen. Da $v \in U$ ein beliebiger Punkt $\neq 0$ war, gibt es folglich keine Verschiebung, die U in sich überführt. Das Parkett U ist nicht-periodisch! Damit ist der zweite Teil des Lemmas bewiesen.

Wir kommen nun zum Beweis des dritten Teils der Behauptung. Es seien $u_1 < u_2 < \dots < u_n$ auf einander folgende Punkte in U . Dann sind sie Bilder von Gitterpunkten G_1, G_2, \dots, G_n unter der Projektion π , und die Gerade g schneidet die Einheitsquadrate aus Gitterpunkten, die zu den G_i gehören, in inneren Punkten. Die Beweisidee ist nun, dass eine Parallele g' zu g , deren Abstand zu g genügend klein ist, im Bereich der G_i die gleichen Einheitsquadrate in inneren Punkten schneidet wie g . Auf g' entsteht also durch Projektion lokal das gleiche Muster $v'_1 < v'_2, \dots < v'_n$ wie das durch u_1, u_2, \dots, u_n gegebene, und wir müssen es nur noch auf g wiederfinden. Dazu nehmen wir einen Gitterpunkt $G(r|s)$ zwischen g und g' , den es nach Lemma 17 mit Sicherheit gibt, und nehmen statt g' die Parallele zu g durch G . Der Einfachheit halber gehen wir einfach davon aus, dass G auf g' liegt. Die Verschiebung τ , die den Nullpunkt auf G bringt, bringt U auf ein zu U kongruentes Gitter $U' = U^\tau$ auf g' . Wir wenden τ^{-1} auf $\{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ an und erhalten Punkte $v_1 < v_2 < \dots < v_n$ aus U , und das Muster der v_i ist zum Muster der u_i kongruent.

Da es unendlich viele Gitterpunkte gibt, die die Rolle des G in unserer Argumentation übernehmen können, taucht das durch die u_i gegebene Muster folglich unendlich oft in U auf. Dies beweist die dritte Aussage des Lemmas. \square

Damit ist der Beweis bis auf das angekündigte Lemma 17 vollständig. Diese Lücke wollen wir sofort schließen. Dazu beweisen wir, dass es zu jeder noch so kleinen positiven Zahl ϵ einen Gitterpunkt $(r|s)$ oberhalb von g gibt, für den $s - mr < \epsilon$ ist. Daraus folgt die Existenz eines Gitterpunkts zwischen g und jeder parallelen Geraden g' , die oberhalb von g verläuft. Für Parallelen, die unterhalb von g verlaufen, lässt sich ähnlich argumentieren. Man schaue sich auch den Beweis des Lemmas 14 auf Seite 19 an.

Lemma 17 *Es sei m irrational und $\epsilon > 0$. Dann gibt es eine ganze Zahl r , so dass $\lceil mr \rceil - mr < \epsilon$ ist.*

Beweis Wir betrachten die Abbildung $\varphi : r \mapsto \lceil mr \rceil - mr$ für $r \in \mathbb{Z}$. Der Wert $\varphi(r)$ gibt an, wie hoch der Gitterpunkt $(r|\lceil mr \rceil)$ über dem Geradenpunkt $(r|mr)$ liegt.

Es gilt stets $0 \leq \varphi(r) < 1$ für $r \in \mathbb{Z}$, und für verschiedene ganze Zahlen r, r' sind auch $\varphi(r)$ und $\varphi(r')$ verschieden, denn sonst wäre ja $\lceil mr \rceil - mr = \lceil mr' \rceil - mr'$, und wir erhielten

$$m = \frac{\lceil mr \rceil - \lceil mr' \rceil}{r - r'} \in \mathbb{Q}$$

im Widerspruch zur Irrationalität von m . Also muss es zu jedem $\epsilon > 0$ ganze Zahlen r, r' geben mit $0 < \varphi(r') - \varphi(r) < \epsilon$. Nun ist $\lceil ms \rceil = ms + \varphi(s)$ für jede ganze Zahl s . Daraus gewinnen wir

$$\lceil m(r' - r) \rceil = \lceil mr' - mr \rceil = \lceil \lceil mr' \rceil - \varphi(r') - \lceil mr \rceil + \varphi(r) \rceil = \lceil \lceil mr' \rceil - \lceil mr \rceil - (\varphi(r') - \varphi(r)) \rceil .$$

Nun ist $\lceil mr' \rceil, \lceil mr \rceil \in \mathbb{Z}$ und $0 < \varphi(r') - \varphi(r) < 1$. Daraus folgt, dass $\lceil m(r' - r) \rceil = \lceil mr' \rceil - \lceil mr \rceil$ und $\varphi(r' - r) = \varphi(r') - \varphi(r)$ ist. Somit haben wir die ganze Zahl $r' - r$ mit $\varphi(r' - r) < \epsilon$ gefunden, die Behauptung ist bewiesen. \square

Literatur

- [1] de Bruijn, N. G., Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane I,II. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A (=Indag. Math.) (1981)
- [2] Feuerbacher, M., Short introduction to quasicrystals. <http://www.feuerbacher.de/misc/qc/introductionQCen.html>
- [3] Gardner, M., Scientific American, Jan. 1977, p. 110-121
- [4] Janot, C., Quasicrystals – A Primer. Oxford 1992