

Mathematischer Samstag zur Geometrie

BW

20. März 2004

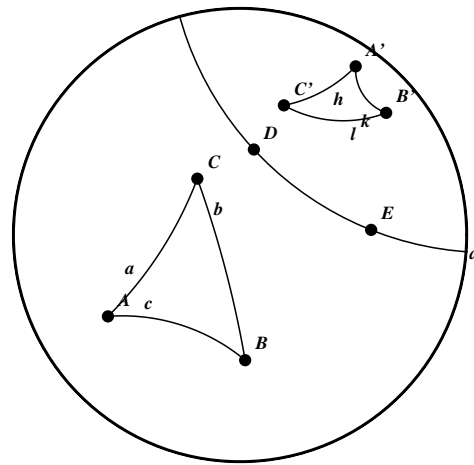


Abbildung 1: Gleichseitiges Dreieck, Spiegelachse und Bilddreieck in der hyperbolischen Ebene

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Cinderella	2
3	Forschungsaufträge	3
4	Abbildungen	4

1 Einführung

Geometrie kennst du von Kindesbeinen an, mit Strecken, Winkeln, Geraden und Figuren bist du vertraut. Wer mit räumlichen Gegenständen zu tun, wie Konstrukteure, Ingenieure, Vermesser oder bildende Künstler, wendet Geometrie an, und so ist es kein Wunder, dass die Menschen lange dachten, die Geometrie erforsche den Raum, der uns umgibt, und die Begriffsbildungen der Geometrie seien geradezu denknötwendig.

Vor über zweitausend Jahren entstanden im antiken Griechenland die berühmten „Elemente“ des Euklid, wohl das meistbenutzte Lehrbuch aller Zeiten. Scheinbar versuchte Euklid, einige einleuchtende Grundsätze zu notieren und dann darauf - nur durch logisches Schließen - das

gesamte Gebäude der Geometrie zu errichten. Ein heutiger Autor¹ gibt seinem Buch über Euklids Elemente den Untertitel „The Creation of Mathematics“, und in der Tat war Euklids Geometrie sehr lange Zeit das Musterbeispiel einer strengen Wissenschaft.

Stelle dir eine Gerade g vor, nach beiden Seiten unbegrenzt, wie sie nur als Idee in deinem Kopf existiert, und nimm einen Punkt P , der nicht auf g liege. Verbinde P mit einem beweglichen Geradenpunkt X und lasse X auf g laufen. Wie sieht das Gebiet aus, das von der Strecke \overline{PX} überstrichen wird? Gibt es eine Gerade h durch P , so dass dieses ganze überstrichene Gebiet (außer P) auf einer Seite der Geraden liegt? Oder gibt es gar mehrere solcher Geraden?

Du wirst der Auffassung sein, dass es genau eine solche Gerade durch P gibt, nämlich die Parallele zu g durch P , und damit bist du in bester Gesellschaft. Viele Mathematiker haben versucht, dies zu beweisen. Einige nahmen dazu an, es gebe mehrere zu g parallele Geraden durch P , um durch diese offensichtlich absurde Annahme zu einem Widerspruch zu kommen. Es fand sich aber kein Widerspruch, so weit man die Theorie auch entwickelte, und am Ende musste man sich mit der Tatsache abfinden, dass es ein System von Punkten und Geraden gibt, mit Längen und Winkeln und allem, was zu einer Geometrie gehört, in dem es aber zu jeder Geraden durch jeden Punkt außerhalb der Geraden genau zwei parallele Geraden gibt: die hyperbolische Ebene. Diese sollst du heute etwas kennenlernen. Dazu besuchst du den Bewohner einer seltsamen Kreiswelt, der die gleichen geometrischen Begriffe benutzt wie du, dessen Geraden aber anders sind als deine. Diese Kreiswelt ist die hyperbolische Ebene. Dein fremder Partner führt die Konstruktionen aus, die du ihm sagst, und für ihn ist seine Geometrie so selbstverständlich wie deine für dich. Wenn du ihm zuschaust, hast du den Eindruck, sein Metermaß schrumpfe, wenn er sich auf den Rand seines Kreises zubewegt. Er wird das energisch abstreiten, der Rand seines Kreises ist für ihn unendlich weit entfernt. Und für ihn gibt es zu g durch $P \notin g$ genau zwei parallele Geraden. Du wirst es ja gleich sehen.

Die ganze Sache ist keineswegs eine Angelegenheit für kauzige Spinner. Wenn es eine andere Geometrie gibt, die in sich so schlüssig ist wie die euklidische, dann gibt es keinen logischen Grund dafür, dass die Welt um uns am besten mit den Vorstellungen der euklidischen Geometrie beschrieben wird, dann sind andere geometrische Vorstellungen vielleicht besser geeignet. In der Tat wurde die nichteuklidische Geometrie, die von Gauß, Lobatschewski und Bolyai kurz nach 1800 entdeckt worden war, von Riemann so verallgemeinert, dass Einstein damit seine Allgemeine Relativitätstheorie formulieren konnte.

2 Cinderella

Dein Kontakt zu dem Kreisweltbewohner geschieht über das Programm Cinderella; du darfst es, wie man mir sagte, privat kostenlos nutzen². Es verhält sich etwas anders als Euklid. Wenn du den Schalter „Punkt hinzufügen“ schaltest, wird dir jeder neue Klick mit der linken Maustaste einen neuen Punkt liefern. Willst du eine Gerade zeichnen, drückst du die linke Maustaste, wenn der Cursor da steht, wo du den ersten Geradenpunkt haben willst. Dann hältst du die linke Maustaste fest und bewegst den Cursor dahin, wo du den zweiten Geradenpunkt haben willst, und lässt die linke Maustaste da erst los. Die ganze Zeit siehst du die Gerade, die bleibt, wenn du die linke Maustaste loslässt. Dieses Verhalten ist typisch für Cinderella.

Wenn du eine Gerade hast und einen Punkt auf dieser Geraden erzeugen willst, betätigst du den Schalter „Punkt hinzufügen“, drückst die linke Maustaste und ziehst den Punkt bei gehaltener Maustaste auf die Gerade. Sobald sie als markiert aufleuchtet, lässt du die Maustaste los. Ist der Punkt ein Schnittpunkt mehrerer Kurven, lässt du los, sobald alle Kurven aufleuchten.

Willst du in einem Punkt einer Geraden eine Senkrechte zu der Geraden errichten, markierst du erst die Gerade, betätigst dann den Schalter „Senkrechte errichten“, bewegst den Cursor auf die Gerade und drückst die linke Maustaste. Eine Senkrechte erscheint. Ziehe sie bei gehaltener linker Maustaste an die richtige Stelle und lasse dann erst los.

¹Benno Artmann, Euclid - the Creation of Mathematics. Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York 1999

²Du kannst dir das Programm (zur Zeit) legal und kostenlos bei www.cinderella.de herunterladen.

Von zentraler Bedeutung für uns ist die Fähigkeit von Cinderella, Zeichnungen in der hyperbolischen Ebene zu erstellen. Du betätigst den Schalter „Hyp“ und zusätzlich im Menü „View“ den Schalter „hyperbolic“. Dann erscheint die Kreiswelt. Schiebe sie so, dass du die alte Zeichenfläche und die Kreiswelt gleichzeitig siehst. Die Konstruktionen musst du je nach Version von Cinderella in dem Kreis in der Ausgangszeichenebene erstellen (größer stellen!). Alles, was du dort zeichnest, erscheint auch in der Kreiswelt. Cinderella arbeitet in der Zeichenebene, es benutzt das Modell von Klein-Beltrami. Geraden sind die Teile von euklidischen Geraden, die in dem Kreis liegen. In der Kreiswelt sind Geraden Kreisbögen (evtl mit unendlichem Radius).

Mache dich etwas mit dem Programm vertraut, besonders auch mit dem Schalter „Parallele zeichnen“ und mit der Messung von Strecken und Winkeln. Probiere auch den Schalter „Mittelpunkt einer Strecke“ aus!

3 Forschungsaufträge

Damit du einen Einstieg hast, habe ich einige Fragen und Anregungen aufgeschrieben, die mir in den Kopf kamen. Du bist aufgerufen, selbst Fragen und Probleme aufzuwerfen!

1. Beobachte, wie sich der Maßstab des Kreisbewohners verändert, wenn er sich auf den Rand zubewegt. Zeichne dazu einen Kreis mit festem Radius und bewege den Kreis.
2. Versuche, ein Rechteck zu konstruieren.
3. Zeichne eine Gerade g , errichte in einem Punkt P von g die Senkrechte und trage darauf eine Strecke fester Länge ab. Welche Linie durchläuft der Endpunkt der Strecke, wenn du P auf g bewegst? (Hinweis: Benutze den Schalter „Ortslinie aufnehmen“)
4. Verhalten sich Geradenspiegelungen so, wie du es gewohnt bist? Steht z.B. die Achse auf der Verbindungsstrecke von Punkt und Bildpunkt senkrecht? Bilden Punkt, Bildpunkt und ein Punkt auf der Achse ein gleichschenkliges Dreieck? Gilt der Basiswinkelsatz?
5. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck und ermittle die Winkelsumme.
6. Gilt der Umfangswinkelsatz in der hyperbolischen Ebene?
7. Wenn du eine Gerade g und einen Punkt außerhalb von g zeichnest und die Parallele zu g durch P verlangst, bekommst du ein Paar von hyperbolischen Geraden durch P . Beide Geraden schneiden g auf dem Randkreis - aber der gehört nicht mehr zur hyperbolischen Ebene. Füge eine Gerade h durch P hinzu, die zwischen den Parallelen verläuft. Angeblich gibt es nun eine Gerade, die auf g und auf h senkrecht steht. Suche eine solche Gerade? Gibt es mehrere?
8. Zeichne zwei Punkte A und B und den Mittelpunkt M der Strecke \overline{AB} . Zeichne nun die Gerade g durch A und B und errichte in A und in B die Senkrechten zu g . Wähle nun einen Punkt P auf der Senkrechten durch A , zeichne die Gerade durch P und M und nenne den Schnittpunkt dieser Geraden mit der anderen Senkrechten Q . Vergleiche die Längen der Strecken \overline{AP} und \overline{BQ} !
Hintergrund: Jan hoffte, der Kreisweltbewohner fände heraus, dass der Maßstab schrumpft, wenn er sich vom Zentrum wegbewegt, weil zwei gleich große Häuser für den Kreisweltbewohner verschieden groß aussehen, wenn er genau zwischen ihnen steht.
9. Hat der Bewohner eine Möglichkeit, herauszufinden, dass seine Kreiswelt nicht euklidisch ist? Ja. Wenn er die Theorie gekrümmter Flächen des Carl Friedrich Gauß zu Rate zieht, kommt er vielleicht auf folgende Methode: Er beschreibt einen Kreis mit einem (nicht zu kleinen) Radius r um einen Mittelpunkt M , misst den Umfang des Kreises und vergleicht ihn mit dem euklidischen Umfang, also mit $2\pi r$. Weicht er davon ab, ist seine Welt nicht euklidisch. Probiere es aus!

4 Abbildungen

Du kennst Kongruenzabbildungen in der Ebene: Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen und Kombinationen davon. Wenn du ein Dreieck verschiebst, bekommst du ein kongruentes Dreieck; das hast du früher schon gemacht. Das geht in der hyperbolischen Ebene nicht so ohne weiteres, weil es dort keine eindeutigen Parallelen gibt.

Im Werkzeugkasten von Cinderella findest du einen Schalter für Spiegelungen, den kannst du ausnutzen. Probiere ihn aus und gehe dann an die folgenden Arbeitsaufträge.

1. Wenn du in der euklidischen Ebene zwei parallele Geraden g und h nimmst und erst an g , dann an h spiegelst, hast du insgesamt eine Verschiebung durchgeführt. Spiegele eine hyperbolische Gerade an einem Paar paralleler Geraden. Ist die Bildgerade wieder parallel zur Ausgangsgeraden?
2. Konstruiere zwei Strecken gleicher Länge an verschiedenen Orten und bringe die eine mit der anderen zur Deckung, indem du mehrmals spiegelst.
3. Wie vor mit zwei kongruenten Dreiecken.
4. Wenn du in der euklidischen Ebene nacheinander an zwei Geraden g und h spiegelst, die sich in einem Punkt P schneiden, hast du eine Drehung um P ausgeführt. Ist das in der hyperbolischen Ebene auch so?